

Wahrscheinlichkeitstheorie 2 & 3

Prof. Dr. Barbara Gentz
mitgeschrieben von Arthur Sinulis

30. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

0. Bedingte Erwartungswerte	4
1. Martingale, Stoppzeiten und Filtrierungen	9
1.1. Stochastische Prozesse und Sigma-Algebren	9
1.2. Stoppzeiten	12
1.3. Martingale in stetiger Zeit	26
1.3.A. Konvergenzsätze	32
1.4. Doob-Meyer-Zerlegung	37
1.5. Stetige, quadratisch integrierbare Martingale	46
2. Brownsche Bewegung	54
2.1. Einführung	54
2.2. Erste Konstruktion einer Brownschen Bewegung	55
2.3. Levy-Cielsielski-Konstruktion der Brownschen Bewegung	57
2.4. Der Raum $\mathcal{C}([0, \infty))$, schwache Konvergenz und das Wiener-Maß	62
2.4.A. Konvergenz endlich dimensionaler Verteilungen	65
2.4.B. Das Invarianzprinzip und das Wiener-Maß	67
2.5. Markoff-Eigenschaft	72
2.5.A. Markoff-Prozesse und Markoffsche Familien	74
2.5.B. Äquivalente Formulierungen der Markoff-Eigenschaft	76
2.6. Starke Markoff-Prozesse und Markoffsche Familien	79
2.6.A. Starke Markoff-Eigenschaft für die Brownsche Bewegung	81
2.7. Brownsche Filtrierungen	85
2.7.A. Rechtsstetigkeit der augmentierten Filtrierung	85
2.7.B. Universelle Filtrierung	86
2.8. Berechnungen mittels Durchgangszeiten	87
2.8.A. Brownsche Bewegung und das running maximum	87
2.9. Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung	88
2.9.A. Die Nullstellenmenge der Brownschen Bewegung	89
2.9.B. Pfade nirgends differenzierbar	90
2.9.C. Gesetz des iterierten Logarithmus	91
3. Stochastische Integration	93
3.1. Konstruktion des stochastischen Integrals	93
3.2. Einfache Prozesse und Approximation	95
3.3. Konstruktion und einfache Eigenschaften des stoch. Integrals	100
3.3.A. Eine Charakterisierung des Integrals	105
3.3.B. Integrale bezüglich stetiger lokaler Martingale	109
3.4. Substitutionsregel / Itô-Formel	111
3.4.A. Itô-Formel	111
3.4.B. Martingalkarakterisierung der Brownschen Bewegung	117
3.4.C. Bessel-Prozesse	118

3.4.D.	Momentenungleichungen für Martingale	123
3.4.E.	Darstellung eines stetigen Martingals mit Hilfe einer Brownschen Bewegung	125
3.4.F.	Stetige lokale Martingale als zeitgeshiftete Brownsche Bewegungen	129
3.5.	Girsanov-Theorem und Cameron-Martin-Formel	132
3.5.A.	Grundlegendes Resultat	132
3.5.B.	Brownsche Bewegung mit Drift	136
3.5.C.	Novikov-Bedingung	137
4.	Stochastische Differentialgleichungen	140
4.1.	Starke Lösungen	140
4.1.A.	Definitionen	140
4.2.	Itô-Theorie	142
4.2.A.	Vergleichende Ergebnisse und weitere Verbesserungen	147
4.3.	Schwache Lösung	150
4.3.A.	Begriff der Eindeutigkeit schwacher Lösungen	150
4.3.B.	Schwache Lösungen mit Hilfe des Girsanov-Theorems	152
4.3.C.	Ein Exkurs über reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten	154
4.3.D.	Ergebnisse von Yamada und Watanabe zu schwachen und starken Lösungen	156
4.4.	Martingal-Problem nach Stroock und Varadhan	159
4.4.A.	Fundamentale Martingale	159
4.4.B.	Schwache Lösung und Martingal-Problem	161
4.4.C.	Wohlgestelltheit und starke Markoff-Eigenschaft	165
4.4.D.	Fragen der Existenz	167
4.4.E.	Fragen der Eindeutigkeit	169
4.4.F.	Infinitesimaler Generator und die Dynkin-Formel	171
4.4.G.	Das kombinierte Dirichlet-Poisson Problem	175
4.4.H.	Das stochastische Poisson-Problem	182
A.	Nachträge	184
	Literatur	185

0. Bedingte Erwartungswerte

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Teil- σ -Algebra (d.h. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist auch ein W-Raum) und $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) := \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine eindimensionale Zufallsvariable (ansonsten betrachte komponentenweise).

Definition 0.0.1:

Eine Zufallsvariable Y derart, dass

- i) Y ist messbar bezüglich \mathcal{A} (kurz: $Y \in \mathcal{A}$)
- ii) $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$ für alle $A \in \mathcal{A}$

heißt eine Version des bedingten Erwartungswertes $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$.

Lemma 0.0.2:

Erfüllt Y die Eigenschaften (i) und (ii), so ist $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

Beweis:

Setze $A := \{Y > 0\} \in \mathcal{A}$, dann gilt nach Eigenschaft (2)

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \leq \int_A |X| d\mathbb{P} < \infty$$

sowie

$$\int_{A^c} -Y d\mathbb{P} = \int_{A^c} (-X) d\mathbb{P} \leq \int_{A^c} |X| d\mathbb{P} < \infty.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}|Y| = \int_A Y d\mathbb{P} + \int_{A^c} (-Y) d\mathbb{P} \leq \int |X| d\mathbb{P} < \infty.$$

□

Lemma 0.0.3 (Eindeutigkeit des bedingten EW):

Angenommen Y und Y' erfüllen die Eigenschaften (i) und (ii). Dann gilt $Y = Y'$ \mathbb{P} -f.s.

Beweis:

Definiere $A_\varepsilon := \{Y - Y' \geq \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann impliziert (i) $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$. Daraus folgt mit (ii)

$$0 = \int_{A_\varepsilon} (X - X) d\mathbb{P} = \int_{A_\varepsilon} (Y - Y') d\mathbb{P} \geq \varepsilon \mathbb{P}(A_\varepsilon)$$

für alle $\varepsilon > 0$. Also gilt $\mathbb{P}(A_\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\mathbb{P}(Y - Y' > 0) = 0$ und damit $Y \leq Y'$ \mathbb{P} -f.s.. Analog gilt dies für $Y' \leq Y$. □

Bemerkung (Satz von Radon-Nikodym):

Sind μ, ν σ -endliche Maße auf (Ω, \mathcal{F}) und $\nu \ll \mu$. Dann existiert eine \mathcal{F} -messbare Funktion f mit $\nu(A) = \int_A f d\mu$.

Man nennt $f =: \frac{d\nu}{d\mu}$ die Radon-Nikodym-Ableitung.

Lemma 0.0.4 (Existenz des bedingten EW):

Für $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ existiert $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$.

Beweis:

1): Sei $X \geq 0$. Definiere $\mu := \mathbb{P}$ und $\nu(A) := \int_A X d\mathbb{P}$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann sind μ und ν σ -endlich und $\nu \ll \mu$. Also existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym

$$\int_A X d\mathbb{P} = \nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mathbb{P}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Damit ist $\frac{d\nu}{d\mu}$ eine Version von $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$.

2): Zerlege $X = X^+ - X^-$. Dann existieren $Y_1 := \mathbb{E}(X^+ | \mathcal{A})$ und $Y_2 := \mathbb{E}(X^- | \mathcal{A})$ nach Teil 1. Nun ist $Y := Y_1 - Y_2$ \mathcal{A} -messbar und es gilt

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A X^+ d\mathbb{P} - \int_A X^- d\mathbb{P} = \int_A Y_1 d\mathbb{P} - \int_A Y_2 d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Folglich ist Y eine Version von $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$. □

Bemerkung (Interpretation des bedingten Erwartungswertes):

Seien \mathcal{A} die „bekanntesten“ Informationen. Dann ist $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ die beste Vermutung, welchen Wert X annimmt, wenn wir nur Ereignisse aus \mathcal{A} kennen.

Beispiel 0.0.5:

Ist X \mathcal{A} -messbar, so gilt $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = X$ \mathbb{P} -f.s.

Ist X unabhängig von \mathcal{A} , dann ist $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E} X$ \mathbb{P} -f.s.

Für den Spezialfall $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist jede Zufallsvariable X von \mathcal{A} unabhängig, d.h. es gilt für alle $X \in \mathcal{L}^1$ $\mathbb{E}(X | \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E} X$.

Beispiel 0.0.6 (Bezug zu bed. Wahrscheinlichkeiten und EW aus Stochastik):

Angenommen $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, wobei die Ω_i paarweise disjunkt sind, d.h. Ω hat eine endliche oder abzählbare Zerlegung in paarweise disjunkte Mengen. Angenommen $\mathbb{P}(\Omega_i) > 0$ für alle $i \in I$. Setze $\mathcal{A} := \sigma(\Omega_i | i \in I)$.

Dann gilt $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} X d\mathbb{P} \right) \mathbb{1}_{\Omega_i}$, d.h. für $\omega \in \Omega_j$ gilt

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{A})(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} X d\mathbb{P} =: \mathbb{E}(X | \Omega_j).$$

Beweis:

(i): $\Omega_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$, d.h. $\mathbb{1}_{\Omega_i} \in \mathcal{A}$ für alle i , d.h. $Y \in \mathcal{A}$.

(ii): Jedes $A \in \mathcal{A}$ hat die Form $A = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ für ein $J \subset I$, wobei die Vereinigungen disjunkt sind. Es genügt daher, $A = \Omega_j$ zu betrachten für ein beliebiges j . Dort gilt aber

$$\int_{\Omega_j} Y d\mathbb{P} = \int_{\Omega_j} \underbrace{\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} X d\mathbb{P}}_{=Y \text{ auf } \Omega_j} d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} X d\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}(\Omega_j) = \int_{\Omega_j} X d\mathbb{P}$$

□

Definition 0.0.7:

Setze $\mathbb{E}(X | Y) := \mathbb{E}(X | \sigma(Y))$ für alle Zufallsvariablen X und Y mit $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

Beispiel 0.0.8 (Bedingter Erwartungswert im Fall von Dichten):

Seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x, y)$. Angenommen für alle y gilt $\int f(x, y)dx > 0$. Falls $\mathbb{E}|g(X)| < \infty$ ist, so gilt

$$\mathbb{E}(g(X) | Y) = h(Y) \text{ mit } h(y) := \frac{\int g(x)f(x, y)dx}{\int f(x, y)dx}.$$

Beweis:

h ist messbar als Funktion von f und g , denn nach Annahme war g messbar. Also ist $h(Y) \in \sigma(Y)$.

Daher ist $h(Y)$ ein Kandidat für den bedingten Erwartungswert. Sei $A \in \sigma(Y)$ beliebig. Dann existiert ein $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $A = \{Y \in B\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_A h(Y)d\mathbb{P} &= \int \mathbb{1}_{\{Y \in B\}}h(Y)d\mathbb{P} = \int \int \mathbb{1}_B(y)h(y)f(x, y)dxdy \\ &= \int \mathbb{1}_B(y)h(y) \left(\int f(x, y)dx \right) dy = \int_B \left(\int g(x)f(x, y)dx \right) dy \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(Y)g(X)) = \int_A g(X)d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 0.0.9:

Seien X und Y unabhängig und $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{E}|\varphi(X, Y)| < \infty$. Definiere $g(x) := \mathbb{E}\varphi(x, Y)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Y) | X) = g(X).$$

Beweis:

Mit Fubini sehen wir, dass $g(X)$ $\sigma(X)$ -messbar ist.

Sei also $A \in \sigma(X)$ beliebig. Dann existiert ein $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ derart, dass $A = \{X \in C\}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_A \varphi(X, Y)d\mathbb{P} &= \int_{\Omega} \varphi(X, Y)\mathbb{1}_C(X)d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y)\mathbb{1}_C(x) \underbrace{\mathbb{P}(X, Y)^{-1}}_{=\mathbb{P}X^{-1} \otimes \mathbb{P}Y^{-1}} d(x, y) \\ &= \int_C \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y)\mathbb{P}Y^{-1}(dy)}_{=\mathbb{E}(\varphi(x, Y)=g(x))} \right) \mathbb{P}X^{-1}(dx) \\ &= \int_C g(x)\mathbb{P}X^{-1}(dx) = \int_A g(X)d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

□

Satz 0.0.10 (Eigenschaften des bedingten EW):

Es gilt

- a) *Linearität:* $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{A}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A})$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $X, Y \in \mathcal{L}^1$.
- b) *Isotonie:* Aus $X \leq Y$ folgt $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A})$.
- c) *Monotone Konvergenz:* Sei $X_n \geq 0, X_n \uparrow X$ mit $\mathbb{E}|X| < \infty$. Dann gilt $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}) \uparrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})$.

Beweis:

Die Linearität folgt aus der Linearität des Integrals.

Zur Isotonie: Sei $A_\varepsilon := \{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{A}$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{A_\varepsilon} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) d\mathbb{P} &= \int_{A_\varepsilon} X d\mathbb{P} \leq \int_{A_\varepsilon} Y d\mathbb{P} = \int_{A_\varepsilon} \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}) d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{A_\varepsilon} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) d\mathbb{P} - \varepsilon \mathbb{P}(A_\varepsilon). \end{aligned}$$

Also folgt $\mathbb{P}(A_\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$ und damit mit der Stetigkeit des Maßes $\mathbb{P}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) > \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A})) = 0$.

Zur monotonen Konvergenz: Definiere $Y_n := X - X_n$, so ist zu zeigen, dass $\mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{A}) \downarrow 0$. Nun ist $Z_n := \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{A}) \downarrow Z_\infty$, wobei Z_∞ eine \mathcal{A} -messbare Zufallsgröße ist. Sei $A \in \mathcal{A}$. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue folgt

$$\int_A Z_n d\mathbb{P} = \int_A Y_n d\mathbb{P} \downarrow 0,$$

sodass schließlich gilt

$$\int_A Z_\infty d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A Z_n d\mathbb{P} = 0.$$

□

Proposition 0.0.11 (Jensensche Ungleichung):

Sei φ konvex, $\mathbb{E}|X| < \infty$ und $\mathbb{E}(|\varphi(X)|) < \infty$. Dann gilt

$$\varphi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X) \mid \mathcal{A}).$$

Satz 0.0.12:

Die bedingte Erwartung ist eine Kontraktion in $\mathcal{L}^p, p \geq 1$, d.h. es gilt

$$\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|X\|_{\mathcal{L}^p}.$$

Satz 0.0.13:

Seien $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ σ -Algebren. Falls $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_2)$ sogar \mathcal{F}_1 -messbar ist, so gilt $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_2)$.

Satz 0.0.14:

Seien $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1) \mid \mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_2) \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1).$$

Satz 0.0.15:

Sei $X \in \mathcal{A}$, $Y, X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X \cdot Y \mid \mathcal{A}) = X \cdot \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}).$$

Satz 0.0.16 (bedingte EW als \mathcal{L}^2 -Projektion):

Sei $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann minimiert $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})$ die Abbildung $\mathcal{A} \ni Y \mapsto \mathbb{E}((X-Y)^2)$, d.h. den mittleren quadratischen Fehler.

1. Martingale, Stoppzeiten und Filtrierungen

1.1. Stochastische Prozesse und Sigma-Algebren

Definition 1.1.1 (Stochastischer Prozess):

Ein stochastischer Prozess ist eine Familie $X = (X_t)_{t \geq 0}$ von \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P} X_t^{-1})$ für alle $t \geq 0$.

Ein stochastischer Prozess heißt messbar, falls die Abbildung

$$X : ([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

messbar ist.

Definition 1.1.2 (Vergleich zweier stochastischer Prozesse):

Seien $X = (X_t)_{t \geq 0}, Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ zwei stochastische Prozesse auf dem selben W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- i) X und Y heißen ununterscheidbar, wenn $\mathbb{P}(X_t = Y_t \forall t \geq 0) = 1$.
- ii) Y heißt Modifikation von X , falls $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \geq 0$.
- iii) X und Y haben die gleichen Randverteilungen, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ gilt

$$\mathbb{P}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1} = \mathbb{P}(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})^{-1}.$$

Es gelten die Implikationen $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$.

Bemerkung:

Wenn Y eine Modifikation von X ist, so sind X und Y im Allgemeinen nicht ununterscheidbar. Sei dazu T eine nichtnegative ZV, die eine Dichtefunktion bezüglich des Lebesguemaßes besitzt. Insbesondere gilt also für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}(T = t) = 0$. Definiere den Prozess $X_t := 0$ für alle $t \geq 0$ und

$$Y_t = \begin{cases} 0 & t \neq T \\ 1 & t = T \end{cases},$$

so gilt für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(T \neq t) = 1$, aber $\mathbb{P}(X_t = Y_t \forall t) = 0$.

Definition 1.1.3 (Filtrierung):

Eine aufsteigende Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ von Teil- σ -Algebren von \mathcal{F} heißt Filtrierung von \mathcal{F} . Für eine Filtrierung gilt also $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $0 \leq s < t$.

Definition 1.1.4:

Definiere für jedes $t \geq 0$ die vom Prozess X erzeugte σ -Algebra als

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s \mid s \leq t) \subset \mathcal{F}.$$

Die Familie $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ heißt die vom Prozess erzeugte Filtrierung.

Definition 1.1.5:

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtrierung von \mathcal{F} . Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_t$ heißt $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert, falls für alle $t \geq 0$ gilt: X_t ist \mathcal{F}_t -messbar.

Definition 1.1.6:

Sei $(\mathcal{F}_t)_t$ eine Filtrierung. Dann definieren wir die σ -Algebren:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\infty &:= \sigma \left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \right) \\ \mathcal{F}_{t^+} &:= \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \\ \mathcal{F}_{t^-} &:= \begin{cases} \mathcal{F}_0 & t = 0 \\ \sigma(\bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s) & t > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$(\mathcal{F}_t)_t$ heißt rechtsstetig, falls $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$ und linksstetig, falls $\mathcal{F}_{t^-} = \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

Definition 1.1.7 (Progressive Messbarkeit):

Ein stochastischer Prozess X heißt progressiv messbar bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$, falls für alle $t \geq 0$ die Abbildung

$$\begin{aligned}X \big|_{[0,t] \times \Omega}: ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) &\rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s, \omega) &\mapsto X_s(\omega)\end{aligned}$$

messbar ist.

Bemerkung:

Ist X progressiv messbar bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$, so ist X messbar und $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert. Zu einem messbaren, adaptierten Prozess existiert eine progressiv messbare Modifikation.

Beweis:

Zu zeigen ist, dass X_t \mathcal{F}_t -messbar ist. Dazu betrachte

$$\begin{aligned}X_t : (\Omega, \mathcal{F}_t) &\rightarrow ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) && \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ \omega &\mapsto (t, \omega) && \mapsto X_t(\omega).\end{aligned}$$

Die erste Abbildung ist messbar und die zweite Abbildung ist messbar, da X progressiv messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ ist. Also ist X_t als Komposition \mathcal{F}_t -messbarer Funktion wieder \mathcal{F}_t -messbar. \square

Proposition 1.1.8:

Ist X ein $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierter stochastischer Prozess und jeder Pfad $t \mapsto X_t(\omega)$ ist rechtsstetig (oder linksstetig), dann ist X progressiv messbar.

Beweis:

Sei jeder Pfad $t \mapsto X_t(\omega)$ rechtsstetig.

- i) Zeitdiskretisierung: Fixiere $t \geq 0$ und splitte das Zeitintervall $[0, t]$ in 2^n Teilintervalle auf (für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$), d.h.

$$[0, t] = \left[0, \frac{t}{2^n}\right] \cup \left(\frac{t}{2^n}, \frac{2t}{2^n}\right] \cup \dots \cup \left(\frac{(2^n - 1)t}{2^n}, t\right]$$

und definiere für $s \in [0, t]$

$$X_s^{(n)}(\omega) := X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega)$$

wobei k so gewählt ist, dass $\frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{(k+1)t}{2^n}$.

- ii) Nun ist $X^{(n)} : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ messbar, denn sei $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dann gilt

$$X^{(n)-1}(O) = \bigcup_{k=0, \dots, 2^n-1} \left(\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n}\right] \times \underbrace{X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}^{-1}(O)}_{\in \mathcal{F}_{\frac{(k+1)t}{2^n}} \subset \mathcal{F}_t}$$

wegen der Adaptiertheit von X .

- iii) Nutze die Rechtsstetigkeit der Pfade und bilde den Limes $n \rightarrow \infty$, dann gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega).$$

Damit ist X als Limes messbarer Zufallsvariablen wieder messbar.

□

Definition 1.1.9:

Eine Zufallszeit ist eine Zufallsvariable $T : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow ([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty]))$. Für einen gegebenen stochastischen Prozess und eine Zufallszeit T definiere $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ auf $\{T < \infty\}$.

Bemerkung:

Falls $X_\infty(\omega) := \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ existiert, kann X_T auf ganz Ω definiert werden:

$$X_T(\omega) := \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) & \omega \in \{T < \infty\} \\ X_\infty(\omega) & \omega \in \{T = \infty\}. \end{cases}$$

1.2. Stoppzeiten

Definition 1.2.1:

Eine Zufallszeit T heißt

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_t)_t\text{-Stoppzeit} &\Leftrightarrow \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0 \\ (\mathcal{F}_t)_t\text{-Optionszeit} &\Leftrightarrow \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0.\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2:

Es gilt:

- i) Ist T eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeit, so auch eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Optionszeit.
- ii) Ist T eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Optionszeit und $(\mathcal{F}_t)_t$ rechtsstetig, so ist T eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeit.

Beweis:

Es gilt

- i) $\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$, da T eine Stoppzeit ist, d.h. das Ereignis ist in $\mathcal{F}_{t - \frac{1}{n}}$ und damit in \mathcal{F}_t für alle $t \geq 0$.
- ii) Da T eine Optionszeit ist, ist $\{T < t + \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ für alle $t \geq 0$. Damit gilt

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{T < t + \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$$

wegen der Rechtsstetigkeit.

□

Korollar 1.2.3:

Es gilt

$$T \text{ ist } (\mathcal{F}_t)_t\text{-Optionszeit} \iff T \text{ ist } (\mathcal{F}_{t+})_t\text{-Stoppzeit.}$$

Definition 1.2.4 (Ersteintrittszeit):

Für einen gegebenen $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierten stochastischen Prozess X mit rechtsstetigen Pfaden definieren wir für eine Teilmenge $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Ersteintrittszeit H_Γ als

$$H_\Gamma = \inf \{t \geq 0 : X_t \in \Gamma\}.$$

Lemma 1.2.5:

Ist $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ offen, so ist die Ersteintrittszeit H_Γ eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Optionszeit. Ist $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und X mit stetigen Pfaden, so ist H_Γ eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeit.

Beweis:

Übung.

□

Lemma 1.2.6:

Seien $(T_n)_n$ eine Folge von $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeiten und S eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeit. Dann sind auch $T + S$, $\min(T, S)$, $\max(T, S)$ und $\sup_{n \geq 1} T_n$ Stoppzeiten. Ist zusätzlich $(\mathcal{F}_t)_t$ rechtsstetig, so sind auch $\limsup_{n \geq 1} T_n$ und $\liminf_{n \geq 1} T_n$ Stoppzeiten.

Beweis:

Beispielweise gilt für $T + S$

$$\begin{aligned} \{T + S > t\} &= \underbrace{\{T = 0\}}_{\in \mathcal{F}_0} \cup \underbrace{\{S > t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cup \{0 < T < t, T + S > t\} \\ &\quad \cup \underbrace{\{T > t, S = 0\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cup \{T \geq t, S > 0\} \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\{0 < T < t, T + S > t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+, 0 < r < t} \{ \underbrace{0 < r < T < t}_{\in \mathcal{F}_t} , \underbrace{S > t - r}_{\in \mathcal{F}_{t-r}} \} \in \mathcal{F}_t.$$

□

Definition 1.2.7 (σ -Algebra der T -Vergangenheit):

Für eine gegebene $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeit T setze

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\}.$$

Lemma 1.2.8:

\mathcal{F}_T ist eine σ -Algebra und T ist \mathcal{F}_T -messbar. Im Spezialfall einer konstanten Stoppzeit $T \equiv t$ gilt $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

Beweis:

Übung. □

Lemma 1.2.9:

Für zwei $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeiten T und S gilt

$$A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T.$$

Insbesondere gilt also, falls $S \leq T$ auf Ω , $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Beweis:

Sei $A \in \mathcal{F}_S$ und $t \geq 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} &= A \cap \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \cap \{S \leq T\} \\ &= \underbrace{A \cap \{S \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{S \wedge t \leq T \wedge t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \end{aligned}$$

denn $S \wedge t$ und $T \wedge t$ sind \mathcal{F}_t -messbar. □

Lemma 1.2.10:

Für zwei $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeiten T und S gilt

$$\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S.$$

Dabei beinhaltet $\mathcal{F}_{T \wedge S}$ unter anderem die Mengen $\{T < S\}$, $\{T \leq S\}$, $\{S < T\}$, $\{S \leq T\}$ und $\{T = S\}$.

Beweis:

Verwende vorheriges Lemma. □

Proposition 1.2.11:

Sei X ein bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ progressiv messbarer stochastischer Prozess und T eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stoppzeit. Dann ist die auf $\{T < \infty\}$ definierte Zufallsvariable $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ \mathcal{F}_T -messbar und der gestoppte Prozess $(X_{T \wedge t})_t$ ist bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ progressiv messbar.

Beweis:

Definiere

$$Y := (X_{T \wedge s})_s : ([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

$$(s, \omega) \mapsto X_{T \wedge s}(\omega) := X_{T(\omega) \wedge s}(\omega).$$

Nun ist Y progressiv messbar, denn

$$([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \quad \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

$$(s, \omega) \mapsto (T(\omega) \wedge s, \omega) \quad \mapsto X_{T(\omega) \wedge s}(\omega)$$

ist messbar, da T eine Stoppzeit ist und X progressiv messbar ist, d.h. Y ist als Komposition auch messbar.

Es bleibt zu zeigen, dass X_T \mathcal{F}_T -messbar ist, d.h. für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist $\{X_T \in B\} \in \mathcal{F}_T$, was nach Definition äquivalent ist zu $\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$. Nun gilt wegen der progressiven Messbarkeit von $X_{T \wedge t}$ (*)

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \underbrace{\{X_{T \wedge t} \in B\}}_{\in \mathcal{F}_t \text{ wegen } (*)} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t \text{ da } T \text{ Stoppzeit}} \in \mathcal{F}_t$$

für alle $t \geq 0$. □

Definition 1.2.12 (Martingal):

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$ -adaptierter stochastischer Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_n$, falls für alle $n \geq m$ gilt

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m.$$

Für ein Martingal $(X_n)_n$ gilt $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.2.13:

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$ -adaptierter stochastischer Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann ein Martingal, wenn der Erwartungswert konstant im starken Sinne ist, d.h. für alle beschränkten Stoppzeiten τ gilt $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_\tau)$.

Beweis:

\Rightarrow : Sei $\tau \leq n$ eine beschränkte Stoppzeit. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_\tau) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau=k\}} X_k\right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau=k\}} X_k) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau=k\}})}_{\in \mathcal{F}_k} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau=k\}} X_n) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)\end{aligned}$$

\Leftarrow : Seien $n \geq m$ beliebig. Für $A \in \mathcal{F}_m$ definiert $\tau := m \cdot \mathbb{1}_{A^c} + n \cdot \mathbb{1}_A$ eine beschränkte $(\mathcal{F}_n)_n$ -Stoppzeit, denn

$$\{\tau \leq k\} = \begin{cases} \emptyset & 0 \leq k \leq m-1 \\ A^c \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_k & m \leq k \leq n-1 \in \mathcal{F}_k \\ \Omega & n \leq k \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Nun gilt nach Voraussetzung

$$\mathbb{E}(X_m \mathbb{1}_{A^c} + X_n \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_m) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_m \cdot \mathbb{1}_{A^c} + X_n \mathbb{1}_A)$$

d.h. $\mathbb{E}((X_n - X_m) \mathbb{1}_A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}_m$. Damit gilt

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(X_m + (X_n - X_m) | \mathcal{F}_m) = X_m + \underbrace{\mathbb{E}(X_n - X_m | \mathcal{F}_m)}_{=0} = X_m$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Sei nun $X = (X_n)_n$ ein zeitdiskreter, reellwertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(\mathcal{F}_n)_n$ eine Filtrierung von \mathcal{F} .

Definition 1.2.14 (Smartingale):

X heißt Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_n$, wenn für alle $n \geq m$ gilt

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) \geq X_m.$$

X heißt Supermartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_n$, falls für alle $n \geq m$ gilt

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) \leq X_m.$$

X ist genau dann ein Supermartingal, wenn $-X$ ein Submartingal ist.

Bemerkung:

Die Charakterisierung der Martingale aus Definition 1.2.12 kann verallgemeinert werden. Ein $(\mathcal{F}_n)_n$ -adaptierter, integrierbarer Prozess $(X_n)_n$ heißt

$$\begin{cases} \text{Submartingal bzgl. } (\mathcal{F}_n)_n \\ \text{Martingal bzgl. } (\mathcal{F}_n)_n \\ \text{Supermartingal bzgl. } (\mathcal{F}_n)_n \end{cases} \iff \mathbb{E}(X_\tau) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} \mathbb{E}(X_{\tau_{max}})$$

für alle beschränkten Stoppzeiten τ , wobei $\tau_{max} := \max\{\tau(\omega) : \omega \in \Omega\}$.

Bemerkung:

Für Submartingale gilt $\mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_m)$ für alle $n \geq m$. Für Supermartingale gilt $\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_m)$ für alle $n \geq m$.

Satz 1.2.15 (Doobs optionaler Stoppsatz):

Falls $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$ -Martingal ist, so gilt für alle $(\mathcal{F}_n)_n$ -Stoppzeiten $\sigma \leq \tau \leq M < \infty$

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma.$$

Beweis:

i) X_τ und X_σ sind integrierbar, denn

$$|X_\tau| = \left| \sum_{k=0}^M X_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}} \right| \leq \sum_{k=0}^M |X_k| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$$

und da alle X_k nach Voraussetzung integrierbar sind.

ii) X_σ ist \mathcal{F}_σ -messbar. Dazu ist zu zeigen, dass für alle $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X_\sigma \in C\} \in \mathcal{F}_\sigma \iff \{X_\sigma \in C\} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $X_\sigma = \sum_{k=0}^M X_k \mathbb{1}_{\{\sigma=k\}}$ gilt

$$\begin{aligned} \{X_\sigma \in C\} \cap \{\sigma \leq n\} &= \bigcup_{k=0}^M \{X_k \in C\} \cap \{\sigma = k\} \cap \{\sigma \leq n\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{M \wedge n} \underbrace{\{X_k \in C\} \cap \{\sigma = k\}}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

iii) Sei $A \in \mathcal{F}_\sigma$, so ist $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_\sigma) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_\tau)$ zu zeigen. Definiere $R := \mathbb{1}_A \cdot \sigma + \mathbb{1}_{A^c} \cdot \tau$, so ist dies ebenfalls eine beschränkte Stoppzeit, denn

$$\{R \leq k\} = (A \cap \{\sigma \leq k\}) \cup (A^c \cap \{\tau \leq k\}) \in \mathcal{F}_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$ -Martingal ist, folgt nach der alternativen Charakterisierung $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ für alle beschränkten Stoppzeiten τ . Damit gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_0) &= \mathbb{E}(X_R) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_\sigma + \mathbb{1}_{A^c} X_\tau) \\ \mathbb{E}(X_0) &= \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_\tau + \mathbb{1}_{A^c} X_\tau) \end{aligned}$$

d.h. $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A (X_\sigma - X_\tau)) = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}_\sigma$.

□

Satz 1.2.16 (Doobsche Martingalzerlegung):

Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$ -Submartingal, so existiert eine \mathbb{P} -f.s. eindeutige Zerlegung

$$X_n = X_0 + M_n + A_n,$$

wobei $M_0 = A_0 = 0$, $(M_n)_n$ ein Martingal und $(A_n)_n$ wachsend und $(\mathcal{F}_{n-1})_n$ -adaptiert, d.h. vorhersehbar, ist.

Beweis:

Definiere $\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$.

1) Existenz: Definiere $(A_n)_n$ durch

$$A_0 := 0 \text{ und } A_{n+1} := \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \geq A_n \geq 0 \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und A_{n+1} ist nach Definition \mathcal{F}_n -messbar. Noch zu zeigen: $M_n := X_n - X_0 - A_n$ ist ein Martingal. M_n ist \mathcal{F}_n -messbar und integrierbar, also bleibt nur die Martingaleigenschaft zu zeigen. Dazu gilt wegen $A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1})$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - X_0 - A_n \\ &= X_{n-1} - X_0 - A_{n-1} = M_{n-1} \end{aligned}$$

Iteration liefert dies für alle $n \geq m$.

2) Eindeutigkeit: Angenommen es gelte $X_n = X_0 + M_n + A_n = X_0 + L_n + C_n$, wobei M, L Martingale und A, C wachsende, $(\mathcal{F}_{n-1})_n$ adaptierte Prozesse sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} M_n - L_n &= C_n - A_n = \mathbb{E}(M_n - L_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} - L_{n-1} \\ &= \dots = M_0 - L_0 = 0 \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

woraus $M_n = L_n$ und $C_n = A_n$ \mathbb{P} -f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt.

□

Lemma 1.2.17:

Ist $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$ -adaptierter, integrierbarer und wachsender Prozess, so ist $(X_n)_n$ ein Submartingal.

Beweis:

Sei $n \geq m$, so gilt $X_n \geq X_m$ \mathbb{P} -f.s., also wegen der Monotonie des bedingten EW

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq \mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_m) = X_m.$$

□

Proposition 1.2.18:

Ist $(M_n)_n$ ein Martingal, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, messbar und $\varphi(M_n)$ integrierbar für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(\varphi(M_n))_n$ ein Submartingal.

Beweis:

Adaptiertheit und Integrierbarkeit folgen unmittelbar aus den Voraussetzungen an φ . Für die Submartingaleigenschaft nutze die Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungswerte (*), so gilt mit Hilfe der Martingaleigenschaft von M

$$\mathbb{E}(\varphi(M_n) \mid \mathcal{F}_m) \stackrel{(*)}{\geq} \varphi(\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_m)) = \varphi(M_m).$$

□

Proposition 1.2.19:

Ist $(X_n)_n$ ein Submartingal, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, messbar und monoton wachsend und $\varphi(X_n)$ integrierbar für alle n , so ist $(\varphi(X_n))_n$ ein Submartingal.

Beweis:

Wie im Beweis zuvor, verwende in (*) die Monotonie von φ :

$$\mathbb{E}(\varphi(X_n) \mid \mathcal{F}_m) \geq \varphi(\underbrace{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m)}_{\geq X_m}) \stackrel{(*)}{\geq} \varphi(X_m) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

□

Beispiel:

Ist $(M_n)_n$ ein Martingal, so sind $(M_n^2)_n$, $(|M_n|)_n$ und $(M_n^*)_n$ mit $M_n^* := \sup_{k \leq n} M_k$ Submartingale.

Proposition 1.2.20:

Ist $(X_n)_n$ ein Submartingal, τ eine Stoppzeit, so ist $(X_{n \wedge \tau})_n$ ein Submartingal.

Beweis:

Die Submartingaleigenschaft folgt aus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{(n+1) \wedge \tau} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\underbrace{X_\tau}_{\in \mathcal{F}_n \text{ auf } \{\tau \leq n\}} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau < n+1\}}}_{\in \mathcal{F}_n} + X_{n+1} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau \geq n+1\}}}_{=\{\tau \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n} \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= \underbrace{X_\tau \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}}_{=X_{n \wedge \tau}} + \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}_{\geq X_n} \geq X_{n \wedge \tau}. \end{aligned}$$

Iteration liefert die Behauptung.

□

Korollar 1.2.21:

Ist $(X_n)_n$ ein Submartingal, $\sigma \leq \tau \leq N$ beschränkte Stoppzeiten, dann gilt $\mathbb{E}(X_\sigma) \leq \mathbb{E}(X_\tau)$.

Beweis:

Nach obiger Proposition ist $(Y_n)_n := (X_{n \wedge \tau})_n$ ein Submartingal, d.h. es gilt

$$\mathbb{E}(X_\sigma) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge \tau}) = \mathbb{E}(Y_\sigma) \leq \mathbb{E}(Y_N) = \mathbb{E}(X_{N \wedge \tau}) = \mathbb{E}(X_\tau).$$

□

Proposition 1.2.22 (1. Doobsche Martingalungleichung):

Ist $(M_n)_n$ ein Martingal oder nichtnegatives Submartingal, so gilt für alle $h > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} |M_k| \geq h\right) \leq \frac{1}{h} \mathbb{E}(|M_n|).$$

Beweis:

- i) Ist $(M_n)_n$ ein Martingal oder nichtnegatives Submartingal, so gilt, dass $(X_n)_n = (|M_n|)_n$ ein Submartingal ist.
- ii) Sei $h \geq 0$ beliebig. Definiere $\sigma := \min\{k \in \mathbb{N} \mid X_k \geq h\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dies ist eine $(\mathcal{F}_n)_n$ -Stopzeit, denn

$$\{\sigma \leq n\} = \{X_k \geq h \text{ für ein } k \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \underbrace{\{X_k < h\}^c}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

Definiere $\tau := \sigma \wedge n$, so ist τ eine beschränkte Stopzeit mit $\tau_{max} \leq n$.

- iii) Also gilt, da $(X_n)_n$ ein Submartingal ist,

$$\mathbb{E}(|M_\tau|) = \mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(|M_n|).$$

- iv) Folglich gilt unter Beachtung, dass $\sigma = \tau$ auf $\{\sigma \leq n\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} |M_k| \geq h\right) &= \mathbb{P}(\sigma \leq n) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\sigma \leq n\}} \cdot \frac{|M_\sigma|}{h}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\sigma \leq n\}} \cdot \frac{|M_\tau|}{h}\right) \leq \frac{1}{h} \mathbb{E}(|M_\tau|) \\ &\stackrel{iii)}{\leq} \frac{1}{h} \mathbb{E}(|M_n|). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.23 (2. Doobsche Martingalungleichung):

Ist $(M_n)_n$ ein Martingal oder positives Submartingal, $M_n^* := \sup_{k \leq n} |M_k|$ und $M_n \in \mathcal{L}^p$ für ein $p > 1$, so gilt

$$\mathbb{E}((M_n^*)^p) \leq c_p \mathbb{E}(|M_n|^p)$$

für ein geeignetes c_p .

Beweis:

- i) Wie in der vorherigen Proposition ist $(|M_n|)_n$ ein Submartingal. Sei $n \in \mathbb{N}$ fix und $h > 0$ beliebig. Dann ist $Y_n := M_n \cdot \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq \frac{h}{2}\}} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}_n)$ und $(X_k^{(n)})_k$ mit $X_k := \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_k)$ ein Martingal für jedes feste $n \in \mathbb{N}$.
- ii) Es gilt $M_n^* \leq \sup_{k \leq n} |X_k^{(n)}| + \frac{h}{2}$, denn für alle $k \leq n$ gilt

$$|M_k| \leq |\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_k)| = \left| \mathbb{E}\left(Y_n + M_n \cdot \mathbb{1}_{\{|M_n| < \frac{h}{2}\}} \mid \mathcal{F}_k\right) \right| \leq |X_k^{(n)}| + \frac{h}{2},$$

sodass die Behauptung nach der Bildung des Supremums folgt.

iii) Mit Hilfe der 1. Doobschen Martingal-Ungleichung in (*) gilt und wegen $|X_n^{(n)}| = |\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_n)| = |Y_n|$

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq h) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} |X_k^{(n)}| \geq \frac{h}{2}\right) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{2}{h} \mathbb{E}\left(|X_n^{(n)}|\right) = \frac{2}{h} \mathbb{E}(|Y_n|).$$

iv) Mit Hilfe des Satzes von Fubini in (*) folgt zusammen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((M_n^*)^p) &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \underbrace{\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda)}_{\leq \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}(|Y_n|)} d\lambda \leq 2p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \mathbb{E}\left(|M_n| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq \frac{\lambda}{2}\}}\right) d\lambda \\ &\stackrel{(*)}{=} 2p \mathbb{E}\left(|M_n| \int_0^\infty \lambda^{p-2} \mathbb{1}_{\{\lambda \leq 2|M_n|\}} d\lambda\right) \\ &= 2p \mathbb{E}\left(|M_n| \int_0^{2|M_n|} \lambda^{p-2} d\lambda\right) \\ &= \frac{p}{p-1} 2^p \mathbb{E}(|M_n|^p) \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 1.2.24 (Doobsche Submartingalungleichung):

Ist $(X_n)_n$ ein Submartingal, so gilt für alle $h > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} X_k \geq h\right) \leq \frac{1}{h} \mathbb{E}(X_n^+).$$

Beweis:

Da $(X_n)_n$ ein Submartingal und $\varphi(x) = x^+$ konvex und monoton wachsend ist, folgt, dass $(M_n)_n := (X_n^+)_n$ ein positives Submartingal ist. Damit folgt für $h > 0$ mit der 1. Doobschen Martingalungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} X_k \geq h\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} X_k^+ \geq h\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} |X_k^+| \geq h\right) \leq \frac{1}{h} \mathbb{E}\left(|X_n^+|\right) \\ &= \frac{1}{h} \mathbb{E}(X_n^+). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.25 (Doobsches Upcrossing-Lemma):

Sei $(X_n)_n$ ein Submartingal, $a < b$ und $N \in \mathbb{N}$. Definiere

$$U_N := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \tau_k \leq N\}$$

als die Upcrossings bis zur Zeit N , wobei die Stoppzeiten definiert sind als $\tau_0 := 0, \sigma_{j+1} = \min\{k > \tau_j \mid X_k \leq a\}, \tau_{j+1} := \min\{k > \sigma_{j+1} : X_k \geq b\}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(U_N) \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}\left((X_N - a)^+\right) \leq \frac{1}{b-a} \left(\mathbb{E}(X_N^+) + |a|\right).$$

Beweis:

1) Da $(X_n)_n$ ein Submartingal ist und $\varphi(x) := (x - a)^+$ konvex und monoton wachsend ist, folgt, dass $Y_n = (X_n - a)^+$ ein Submartingal definiert. Ferner gilt $Y_{\tau_k} \geq b - a$ und $Y_{\sigma_k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. $Y_{\tau_k} - Y_{\sigma_k} \geq b - a$.

2) Es gilt

$$\begin{aligned} D &:= \sum_{k=1}^N (Y_{\tau_k \wedge N} - Y_{\sigma_k \wedge N}) = \sum_{k=1}^{U_N} \underbrace{Y_{\tau_k \wedge N} - Y_{\sigma_k \wedge N}}_{=Y_{\tau_k} - Y_{\sigma_k}} + \sum_{k=U_N+1}^N \underbrace{Y_{\tau_k \wedge N}}_{=Y_N \geq 0} - \underbrace{Y_{\sigma_k \wedge N}}_{\in \{0, Y_N\}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{U_N} (Y_{\tau_k \wedge N} - Y_{\sigma_k \wedge N}) \geq U_N \cdot (b - a). \end{aligned}$$

3) Es gilt $\sigma_{N+1} > N$ und damit

$$\begin{aligned} Y_N - Y_{\sigma_1 \wedge N} &= Y_{\sigma_{N+1} \wedge N} - Y_{\sigma_1 \wedge N} = \sum_{k=1}^N (Y_{\sigma_{k+1} \wedge N} - Y_{\sigma_k \wedge N}) \\ &= \sum_{k=1}^N (Y_{\sigma_{k+1} \wedge N} - Y_{\tau_k \wedge N}) + \underbrace{\sum_{k=1}^N (Y_{\tau_k \wedge N} - Y_{\sigma_k \wedge N})}_{=D}, \end{aligned}$$

woraus

$$D = Y_N - Y_{\sigma_1 \wedge N} - \sum_{k=1}^N (Y_{\sigma_{k+1} \wedge N} - Y_{\tau_k \wedge N}) \leq Y_N - \sum_{k=1}^N (Y_{\sigma_{k+1} \wedge N} - Y_{\tau_k \wedge N})$$

folgt.

4) Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_N) &\stackrel{2)}{\leq} \frac{1}{b-a} \mathbb{E}(D) \stackrel{3)}{\leq} \frac{1}{b-a} \mathbb{E}(Y_N) - \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^N \underbrace{\mathbb{E}(Y_{\sigma_{k+1} \wedge N} - Y_{\tau_k \wedge N})}_{\geq 0} \\ &\leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}(Y_N) \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\tau} := \tau_k \wedge N \leq \sigma_{k+1} \wedge N =: \tilde{\sigma}$ Stoppzeiten sind, d.h. $\mathbb{E}(Y_{\tilde{\sigma}}) \leq \mathbb{E}(Y_{\tilde{\tau}})$ gilt. Damit folgt die Behauptung, da $Y_N = (X_N - a)^+$.

□

Satz 1.2.26 (Submartingal-Konvergenzsatz):

Sei $(X_n)_n$ ein Submartingal mit $c := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$. Dann konvergiert X_n \mathbb{P} -f.s. gegen eine Zufallsvariable $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$.

Beweis:

Für die Konvergenz genügt es zu zeigen, dass \mathbb{P} -f.s.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$$

gilt.

1) Definiere

$$\Lambda := \{\limsup_n X_n > \liminf_n X_n\} = \bigcup_{a < b, a, b \in \mathbb{Q}} \Lambda_{a,b}$$

wobei $\Lambda_{a,b} := \{\limsup_n X_n \geq b\} \cap \{\liminf_n X_n \leq a\} = \{\omega \in \Omega : U(a,b) = \infty\}$, d.h. die Pfade mit unendlich vielen upcrossings von a und b , wobei $U(a,b) := \lim_{N \rightarrow \infty} U_N(a,b)$ die Anzahl der (a,b) -upcrossings für den gesamten Pfad bezeichnet (beachte: dies ist eine aufsteigende Folge).

2) Seien $a, b \in \mathbb{Q}, a < b$ beliebig. Mit monotoner Konvergenz (*) und dem Doobschen Upcrossing-Lemma (**) gilt

$$\mathbb{E}(U(a,b)) \stackrel{(*)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(U_N) \stackrel{(**)}{\leq} \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{(\limsup_N \mathbb{E}(X_N^+) + |a|)}_{\leq c < \infty} < \infty$$

woraus $U(a,b) < \infty$ \mathbb{P} -f.s. und damit $\mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0$ folgt. Als abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist Λ eine Nullmenge.

3) Es bleibt zu zeigen, dass $X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$. Dazu gilt mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_\infty|) &= \mathbb{E}(\lim_n |X_n|) = \mathbb{E}(\lim_n \inf |X_n|) \leq \lim_n \inf \mathbb{E}(|X_n|) \\ &\leq \lim_n \inf (2 \mathbb{E}(X_n^+) - \underbrace{\mathbb{E}(X_n)}_{\geq \mathbb{E}(X_0)}) \leq 2c - \mathbb{E}(X_0) < \infty. \end{aligned}$$

□

Definition 1.2.27:

Eine Menge von Zufallsvariablen $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ heißt gleichgradig integrierbar, falls

$$\sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X| \geq L}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Proposition 1.2.28:

Es gelten

- i) Gilt $\sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ für ein $1 < p < \infty$, so ist \mathcal{H} gleichgradig integrierbar.
- ii) Gilt $|X| \leq Y$ für alle $X \in \mathcal{H}$ für ein festes $Y \geq 0$ mit $Y \in \mathcal{L}^1$, so ist \mathcal{H} gleichgradig integrierbar.

Beweis:

i) Ist $X \in \mathcal{H}$, so gilt mit $c := \sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(|X|^p)$

$$\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{\{|X| \geq L\}}) \leq \mathbb{E} \left(|X| \frac{|X|^{p-1}}{L^{p-1}} \mathbb{1}_{\{|X| \geq L\}} \right) \leq \frac{1}{L^{p-1}} \underbrace{\mathbb{E}(|X|^p)}_{\leq c} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

uniform in $X \in \mathcal{H}$.

ii) Für jedes $X \in \mathcal{H}$ gilt $|X| \leq Y$, d.h. $|X| \mathbb{1}_{\{|X| \geq L\}} \leq Y \mathbb{1}_{\{|X| \geq L\}} \leq Y \mathbb{1}_{\{|Y| \geq L\}}$, was wegen $Y \in \mathcal{L}^1$ für $L \rightarrow \infty$ gegen 0 \mathbb{P} -f.s. konvergiert. Mit Hilfe von majorisierter Konvergenz gilt

$$\sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{\{|X| \geq L\}}) \leq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{|Y| \geq L\}}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

□

Satz 1.2.29 (Martingal-Konvergenzsatz):

Sei $(M_n)_n$ ein Martingal und $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar. Dann gilt

i) $M_n \rightarrow M_\infty$ \mathbb{P} -f.s. für ein $M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$.

ii) $\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, d.h. $M_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} M_\infty$.

iii) $M_n = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ und definiere $M_n := \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)$, so ist $\{M_n | n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar.

Beweis:

i) Für den ersten Teil genügt es zu zeigen, dass $c := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(M_n^+) < \infty$. Dann folgt die Behauptung aus dem Submartingal-Konvergenzsatz. Da $\{M_n | n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar ist, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $L > 0$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_n| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}}) < \varepsilon$. Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$\mathbb{E}(M_n^+) \leq \mathbb{E}(|M_n|) = \underbrace{\mathbb{E}(|M_n| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}})}_{< \varepsilon} + \underbrace{\mathbb{E}(|M_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|M_n| < L\}})}_{< L} < \varepsilon + L$$

unabhängig von n .

ii) Für $L > 0$ beliebig definiere die cutoff Funktion

$$f_L(x) := \begin{cases} L & x > L \\ x & -L \leq x \leq L \\ -L & x < -L \end{cases}$$

welche stetig und beschränkt ist. Zerlege nun

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) &= \mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n) + f_L(M_n) - f_L(M_\infty) + f_L(M_\infty) - M_\infty|) \\ &\leq \underbrace{\mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n)|)}_{\alpha_n} + \underbrace{\mathbb{E}(|f_L(M_n) - f_L(M_\infty)|)}_{\beta_n} + \underbrace{\mathbb{E}(|f_L(M_\infty) - M_\infty|)}_{\gamma_n}.\end{aligned}$$

Nun gilt für α_n

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n)|) &= \mathbb{E}(\underbrace{|M_n - (-L)|}_{\leq |M_n+L| \leq 2|M_n|} \mathbb{1}_{\{M_n < -L\}}) + \mathbb{E}(\underbrace{|M_n - L|}_{\leq 2|M_n|} \mathbb{1}_{\{M_n > L\}}) \\ &\leq 2 \mathbb{E}(|M_n| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}}) \leq \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit für ein $L \geq L'_\varepsilon$, uniform in n .

Analog gilt für γ_n , da M_∞ integrierbar ist,

$$\mathbb{E}(|f_L(M_\infty) - M_\infty|) \leq 2 \mathbb{E}(|M_\infty| \cdot \mathbb{1}_{\{|M_\infty| > L\}}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

für ein $L \geq L''_\varepsilon$. Also gilt für alle $L \geq L_\varepsilon := \max(L'_\varepsilon, L''_\varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n + \gamma_n < \frac{2}{3}\varepsilon$. Nach Teil i) gilt $M_n \rightarrow M_\infty$ \mathbb{P} -f.s., d.h. wegen der Stetigkeit von f_L gilt auch $f_L(M_n) \rightarrow f_L(M_\infty)$ \mathbb{P} -f.s. Wegen $|f_L(M_n)| \leq L \in \mathcal{L}^1$ folgt mit Hilfe der majorisierten Konvergenz auch $\mathbb{E}(f_L(M_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f_L(M_\infty))$, d.h. es existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt

$$\mathbb{E}(|f_L(M_n) - f_L(M_\infty)|) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also gilt die Behauptung für L_ε und N_ε .

iii) Fasse M_n als Kandidaten für die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)$ auf. Da M_n \mathcal{F}_n -messbar ist, bleibt nur zu zeigen, dass für alle $A \in \mathcal{F}_n$ $\mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_A)$ gilt. Für alle $N \geq n$ gilt wegen der Martingaleigenschaft von M in (*)

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}((M_n - M_\infty) \mathbb{1}_A)| &\leq \underbrace{|\mathbb{E}((M_n - M_N) \mathbb{1}_A)|}_{\stackrel{(*)}{=} 0} + |\mathbb{E}((M_N - M_\infty) \mathbb{1}_A)| \\ &\leq \mathbb{E}(|M_N - M_\infty|) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt, da die linke Seite unabhängig von N ist.

Zum Zusatz: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $L > 0$ gilt

$$\mathbb{E}(|M_n| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}}) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}}) \leq \mathbb{E}(|Y| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}}).$$

Für alle $K > 0$ gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|M_n| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}}) &\leq \mathbb{E}(|Y| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}} \mathbb{1}_{\{|Y| \geq K\}}) + \mathbb{E}(|Y| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}} \mathbb{1}_{\{|Y| < K\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(|Y| \mathbb{1}_{\{|Y| \geq K\}}) + K \cdot \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}})}_{\leq \frac{1}{L} \mathbb{E}(|M_n|)}\end{aligned}$$

wegen der Markoff-Ungleichung. Zusätzlich gilt $\mathbb{E}(|M_n|) = |\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}(|Y| | \mathcal{F}_n)$ und damit ist

$$\mathbb{E}(|M_n| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}}) \leq \mathbb{E}(|Y| \mathbb{1}_{\{|Y| \geq K\}}) + \frac{K}{L} \cdot \mathbb{E}(|Y|)$$

eine gleichmäßige obere Schranke. Für K und L groß genug gilt daher $\mathbb{E}(|M_n| \mathbb{1}_{\{|M_n| \geq L\}}) < \varepsilon$ und damit die Behauptung. \square

Definition 1.2.30:

Definiere die σ -Algebra $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$.

Korollar 1.2.31:

Für alle $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ gilt $M_n := \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_\infty)$ \mathbb{P} -f.s. Falls Y sogar \mathcal{F}_∞ -messbar ist, folgt $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y$ \mathbb{P} -f.s.

Beweis:

Da $M_n = \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)$, folgt nach dem zweiten Teil des MKS, dass $\{M_n | n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar ist. Also folgt aus dem MKS $M_n \rightarrow M_\infty$ \mathbb{P} -f.s. für eine integrierbare Zufallsvariable M_∞ . Zu zeigen ist nur, dass $M_\infty = \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_\infty)$. Jedes M_n ist $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty$ -messbar, d.h. auch M_∞ als \mathbb{P} -f.s. Limes. Nach dem Martingalkonvergenzsatz gilt

$$\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n) = M_n = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle n , d.h. nach der Definition der bedingten Erwartung gilt

$$\mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$$

und weil $A \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ ein schnittstabiler Erzeuger von \mathcal{F}_∞ ist, gilt auch

$$\mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\infty.$$

\square

1.3. Martingale in stetiger Zeit

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein reellwertiger Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X_t \in \mathcal{L}^1$ für alle $t \geq 0$. Sei eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ gegeben und X sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptiert.

Definition (Übliche Bedingungen):

Eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_t$ von \mathcal{F} erfüllt die üblichen Bedingungen, wenn

- $(\mathcal{F}_t)_t$ ist rechtsstetig.
- $(\mathcal{F}_t)_t$ enthält alle $N \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$ für alle $t \geq 0$. Dabei genügt zu zeigen, dass $N \in \mathcal{F}_0$ für alle \mathbb{P} -Nullmengen aus \mathcal{F} .

Proposition 1.3.1:

Sei X $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert und RCLL und $(\mathcal{F}_t)_t$ erfülle die üblichen Bedingungen. Dann existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_n$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$, die die Sprünge von X ausschöpft im Sinne von

$$\{(t, \omega) \in (0, \infty) \times \Omega : X_t(\omega) \neq X_{t-}(\omega)\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega : \tau_n(\omega) = t\}$$

Bemerkung:

Sei Z eine reellwertige Zufallsvariable und $c \geq 0$. Dann sind die Aussagen äquivalent:

- i) $\mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot c \quad \forall \lambda > 0$.
- ii) $\mathbb{P}(Z > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot c \quad \forall \lambda > 0$.

Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$: Wähle zu $\lambda > 0$ eine fallende Folge $\lambda_m \downarrow \lambda$. Dann gilt $\{Z \geq \lambda_m\} \uparrow \{Z > \lambda\}$, d.h. $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{Z \geq \lambda_m\} = \{Z > \lambda\}$. Daraus folgt mit der Maßstetigkeit von unten

$$\mathbb{P}(Z > \lambda) = \lim_m \mathbb{P}(Z \geq \lambda_m) \leq \lim_m \frac{1}{\lambda_m} \cdot c = \frac{1}{\lambda} \cdot c.$$

$ii) \Rightarrow i)$: Wähle zu $\lambda > 0$ eine aufsteigende Folge $\lambda_m \uparrow \lambda$, so gilt $\{Z > \lambda_m\} \downarrow \{Z \geq \lambda\}$, d.h. $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{Z > \lambda_m\} = \{Z \geq \lambda\}$. Also folgt mit der Maßstetigkeit von oben

$$\mathbb{P}(Z \geq \lambda) = \lim_m \mathbb{P}(Z > \lambda_m) \leq \lim_m \frac{1}{\lambda_m} \cdot c = \frac{1}{\lambda} \cdot c.$$

□

Satz 1.3.2 (Doobsche Submartingal-Ungleichung):

Sei $(X_t)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$ -Submartingal, wobei die Pfade von $(X_t)_t$ rechtsstetig sind. Dann gilt für alle $t > 0$ und $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X_t^+).$$

Beweis:

i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ beliebig. Definiere einen zeitdiskreten stochastischen Prozess $(Y_k)_k$ durch $Y_k := X_{\frac{k \cdot t}{2^n}}$ und eine zeitdiskrete Filtrierung durch $\mathcal{F}_k := F_k^Y$, dann ist $(Y_k)_k$ ein $(\mathcal{F}_k)_k$ -Submartingal. Für jedes $\lambda > 0$ gilt wegen der Doob'schen Submartingal-Ungleichung in diskreter Zeit für $N := 2^n$

$$\mathbb{P} \left(\sup_{k \leq N} X_{\frac{kt}{2^n}} > \lambda \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{k \leq N} Y_k > \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(Y_N^+) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X_t^+)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $F_n := \{0, \frac{t}{2^n}, \dots, t\}$ und $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, dann liegt F dicht in $[0, t]$. Wegen $F_n \uparrow F$ gilt auch

$$\left\{ \sup_{s' \in F_n} X_{s'} > \lambda \right\} \uparrow \left\{ \sup_{s' \in F} X_{s'} > \lambda \right\} = \left\{ \sup_{s \in [0, t]} X_s > \lambda \right\}$$

wobei im letzten Schritt die rechtsstetigen Pfade eingehen. Denn für jedes $s \in [0, t]$ existiert eine Folge $(s'_l)_l \subset F$ mit $s'_l \downarrow s$, sodass mit der Rechtsstetigkeit folgt

$$X_s(\omega) = \lim_{l \rightarrow \infty} X_{s'_l}(\omega) \leq \sup_{s' \in F} X_{s'}(\omega)$$

woraus nach Bildung des Supremums $\sup_{s \in [0, t]} X_s(\omega) \leq \sup_{s' \in F} X_{s'}(\omega)$ folgt. Die andere Ungleichung ist klar.

Mit der Maßstetigkeit von unten folgt nun $\mathbb{P}(\sup_{s' \in F_n} X_{s'} > \lambda) \rightarrow \mathbb{P}(\sup_{s \in [0, t]} X_s > \lambda)$, d.h. es gilt

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t]} X_s > \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X_t^+) \quad \forall \lambda > 0$$

$$\stackrel{\text{Bem.}}{\Leftrightarrow} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t]} X_s \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X_t^+) \quad \forall \lambda > 0.$$

□

Proposition 1.3.3:

Sei X ein Martingal (Submartingal) und $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex (und monoton wachsend) mit $\varphi(X_t) \in \mathcal{L}^1$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $(\varphi(X_t))_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$ -Submartingal.

Beweis:

Wie im diskreten Fall. □

Definition 1.3.4 (Aufsteigende Überquerungen eines Intervalles):

Sei $Y = (Y_t)_t$ ein reellwertiger stochastischer Prozess, $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ und $F \subset [0, \infty)$ eine endliche Teilmenge der Zeitachse.

Dazu sei $U_F(\alpha, \beta, Y(\omega))$ die Anzahl der upcrossings des Intervalls $[\alpha, \beta]$ durch $(Y_t)_{t \in F}$, d.h. definiere

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= \min\{t \in F : X_t \leq \alpha\} \\ \sigma_j &:= \min\{t \in F : t \geq \tau_j, X_t \geq \beta\} \\ \tau_{j+1} &:= \min\{t \in F : t \geq \sigma_j, X_t \leq \alpha\} \end{aligned}$$

für $j \geq 1$ und bezeichne mit $U_F(\alpha, \beta, Y(\omega))$ das größte j mit $\sigma_j(\omega) < \infty$.
Für nichtendliche Zeitmengen $I \subset [0, \infty)$ definiere

$$U_I(\alpha, \beta, Y(\omega)) := \sup\{U_F(\alpha, \beta, Y(\omega)) : F \subset I \text{ endlich}\}.$$

Satz 1.3.5 (Doobsche Submartingal-Ungleichungen):

Sei X ein Submartingal mit rechtsstetigen Pfaden, $[s_0, t_0] \subset [0, \infty)$ ein Zeitintervall, $\alpha < \beta$ und $\lambda > 0$ beliebig. Dann gelten

i) Die Doobsche Submartingal-Ungleichung, 1. Form:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s_0 \leq t \leq t_0} X_t \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X_{t_0}^+).$$

ii) Die Doobsche Submartingal-Ungleichung, 2. Form:

$$\mathbb{P}\left(\inf_{s_0 \leq t \leq t_0} X_t \leq -\lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \left(\mathbb{E}(X_{t_0}^+) - \mathbb{E} X_{s_0}\right).$$

iii) Die Upcrossing / Downcrossing-Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} U_{[s_0, t_0]}(\alpha, \beta, X) &\leq \frac{\mathbb{E}(X_{t_0}^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha} \\ \mathbb{E} D_{[s_0, t_0]}(\alpha, \beta, X) &\leq \frac{\mathbb{E}\left((X_{t_0} - \alpha)^+\right)}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

iv) Die Doobsche Maximalungleichung: Falls $X_t \geq 0$ \mathbb{P} -f.s. für alle t und $X_{t_0}^p \in \mathcal{L}^1$:

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{s_0 \leq t \leq t_0} X_t\right)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(X_{t_0}^p)$$

für alle $p > 1$.

v) Regularität der Pfade:

- \mathbb{P} -f.a. Pfade weisen keine Unstetigkeitsstellen zweiter Art auf, d.h. die linksseitigen Limiten existieren überall auf $(0, \infty)$.
- Falls die Filtrierung die üblichen Bedingungen erfüllt, so existiert eine Folge von Stoppzeiten, die die Sprünge ausschöpft.

Beweis:

- i) Wurde bereits bewiesen.
- ii) Siehe Übungen.

iii) $U_{[s_0, t_0]}(\alpha, \beta, X)$ ist messbar als Supremum messbarer Abbildungen. Für eine beliebige diskrete Menge $F = \{t_1, \dots, t_N\}$ mit $t_i < t_{i+1}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_F(\alpha, \beta, X)) &\leq \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\mathbb{E}(X_{t_N}^+) + |\alpha| \right) \\ \Rightarrow \mathbb{E}(U_F(\alpha, \beta, X)) &\leq \mathbb{E}(U_{F \cup \{t_0\}}(\alpha, \beta, X)) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\mathbb{E}(X_{t_0}^+) + |\alpha| \right).\end{aligned}$$

Sei F_n eine Folge endlicher Mengen mit $F_n \uparrow \underbrace{([s_0, t_0] \cap \mathbb{Q}) \cup \{s_0, t_0\}}_{=: Q}$, so folgt wegen

der Monotonie

$$\mathbb{E}(U_{Q_n}(\alpha, \beta, X)) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\mathbb{E}(X_{t_0}^+) + |\alpha| \right).$$

Mit der Dichtheit von Q in $[s_0, t_0]$ und der Rechtsstetigkeit folgt die Behauptung.

iv) Für diskretes $F \subset [s_0, t_0]$ gilt hier erneut

$$\mathbb{E} \left(\left(\sup_{s_0 \leq t \leq t_0} X_t \right)^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(X_{t_0}^p).$$

Mit der selben approximierenden Folge, der Dichtheit und der Rechtsstetigkeit folgt die Behauptung aus

$$\mathbb{E} \left(\left(\sup_{t \in Q} X_t \right)^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(X_{t_0}^p).$$

v) Wir zeigen die Beschränktheit auf jedem Kompaktum. Dazu sei das Kompaktum OE $[0, n]$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq n} X_t = \infty \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq n} X_t \geq K \ \forall K \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq n} X_t \geq K \right) \\ &\leq \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \mathbb{E}(X_n^+) = 0.\end{aligned}$$

Die Existenz der linksseitigen Limiten für \mathbb{P} -f.a. Pfade: Dazu sei für $n \geq 1$

$$A_{[\alpha, \beta]}^{(n)} = \{\omega \in \Omega : U_{[0, n]}(\alpha, \beta, X(\omega)) = \infty\}.$$

Dann gilt $\mathbb{P}(A_{[\alpha, \beta]}^{(n)} = 0)$, denn

$$\underbrace{\mathbb{E} U_{[0, n]}(\alpha, \beta, X)}_{\geq 0} < \infty \implies U_{[0, n]}(\alpha, \beta, X) < \infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Damit gilt auch $\mathbb{P}(A^{(n)}) = 0$ für $A^{(n)} = \bigcup_{\alpha < \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}} A_{[\alpha, \beta]}^{(n)}$. Nun gilt die Inklusion

$$\{\exists t \in [0, n] : \liminf_{s \uparrow t} X_s(\omega) < \limsup_{s \uparrow t} X_s(\omega)\} \subset A^{(n)}.$$

Daraus folgt, dass $X_{t-}(\omega) := \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega)$ für jedes $t \in [0, n]$ und alle $\omega \in \Omega \setminus A^{(n)}$ existiert. Da n beliebig war, gilt, dass für \mathbb{P} -f.a. Pfade ω die linksseitigen Limiten für alle t existieren.

□

Proposition 1.3.6:

Sei X ein Submartingal. Dann gelten:

i) Es existiert eine Menge $\Omega^* \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$, sodass

$$X_{t+}^{\mathbb{Q}}(\omega) := \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega)$$

$$X_{t-}^{\mathbb{Q}}(\omega) := \lim_{s \uparrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega)$$

für alle $t \geq 0$ (bzw. $t > 0$) und alle $\omega \in \Omega^*$ existiert.

ii) Für die Limiten aus (i) gilt

$$\mathbb{E}(X_{t+}^{\mathbb{Q}} | \mathcal{F}_t) \geq X_t \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-}) \geq X_{t-}^{\mathbb{Q}} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $t \geq 0$.

iii) $(X_{t+}^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0}$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_t$ -Submartingal mit RCLL Pfaden.

Beweis:

Ohne Beweis.

□

Satz 1.3.7:

Sei X ein Submartingal und $(\mathcal{F}_t)_t$ erfülle die üblichen Bedingungen. Dann gilt

i) X hat eine rechtsstetige Modifikation genau dann, wenn $[0, \infty) \ni t \mapsto \mathbb{E} X_t$ rechtsstetig ist.

ii) Wenn eine rechtsstetige Modifikation existiert, so kann diese RCLL gewählt werden, sodass die Modifikation $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert ist. Die Modifikation kann als Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ gewählt werden.

Beweis:

i) " \Leftarrow ": Sei $t \mapsto \mathbb{E} X_t$ rechtsstetig. Per Annahme gilt $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$. Wähle $(X_{t+}^{\mathbb{Q}})_t$ aus Proposition 1.3.6 und zeige, dass dieser Prozess eine Modifikation mit den gewünschten Eigenschaften ist. Zunächst ist $(X_{t+}^{\mathbb{Q}})_t$ per Definition rechtsstetig und $(\mathcal{F}_{t+})_t$ -adaptiert. Also bleibt nur zu zeigen, dass $(X_{t+}^{\mathbb{Q}})_t$ eine Modifikation von $(X_t)_t$ ist.

Wähle eine Folge $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}$ mit $q_n \downarrow t$. Dann gilt $\lim_n X_{q_n} = X_{t+}^{\mathbb{Q}}$ \mathbb{P} -f.s. nach

Proposition 1.3.6(i). Ferner gilt wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit in (*) und der Rechtsstetigkeit von $t \mapsto \mathbb{E} X_t$ in (**)

$$\mathbb{E} X_{t^+}^{\mathbb{Q}} \stackrel{(*)}{=} \lim_n \mathbb{E} X_{q_n} \stackrel{(**)}{=} \mathbb{E} X_t$$

und Proposition 1.3.6(ii) liefert $X_{t^+}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}(X_{t^+}^{\mathbb{Q}} | \mathcal{F}_t) \geq X_t$ \mathbb{P} -f.s. Zusammen folgt also wegen $\mathbb{E} X_{t^+}^{\mathbb{Q}} - X_t = 0$ und $X_{t^+}^{\mathbb{Q}} - X_t \geq 0$ $X_{t^+}^{\mathbb{Q}} = X_t$ \mathbb{P} -f.s.

" \Rightarrow ": Sei $(\tilde{X}_t)_t$ eine rechtsstetige Modifikation. Sei $t_n \downarrow t$ eine Folge, so gilt $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t, X_{t_n} = \tilde{X}_{t_n} \forall n) = 1$ und wegen der Rechtsstetigkeit $\lim_n \tilde{X}_{t_n} = \tilde{X}_t$ \mathbb{P} -f.s. Also gilt $\lim_n X_{t_n} = X_t$ \mathbb{P} -f.s. und wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit auch $\mathbb{E} X_t = \lim_n \mathbb{E} X_{t_n}$, sodass $t \mapsto \mathbb{E} X_t$ rechtsstetig ist.

ii) Folgt mit (iii) aus Proposition 1.3.6.

□

1.3.A. Konvergenzsätze

Satz 1.3.8 (Konvergenzsatz für Submartingale):

Sei X ein rechtsstetiges Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ und $c := \sup_{t \geq 0} \mathbb{E} X_t^+ < \infty$. Dann existiert ein $X_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ \mathbb{P} -f.s. und $X_\infty \in \mathcal{L}^1$.

Beweis:

Für alle $n \geq 1$ und $\alpha < \beta$ beliebig gilt

$$\mathbb{E} U_{[0,n]}(\alpha, \beta, X) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} (\mathbb{E} X_n^+ + |\alpha|) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} (c + |\alpha|)$$

d.h. wegen der monotonen Konvergenz auch

$$\mathbb{E} U_{[0,\infty)}(\alpha, \beta, X) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} (c + |\alpha|).$$

Sei $A_{[\alpha,\beta]} = \{U_{[0,\infty)}(\alpha, \beta, X) = \infty\}$. Dann gilt wegen $\mathbb{E}(U_{[0,\infty)}(\alpha, \beta, X)) < \infty$ auch $\mathbb{P}(A_{[\alpha,\beta]}) = 0$. Also gilt für

$$A := \bigcup_{\alpha < \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}} A_{[\alpha,\beta]}$$

auch $\mathbb{P}(A) = 0$. Außerdem gilt $\{\limsup_t X_t(\omega) > \liminf_t X_t(\omega)\} \subset A$, woraus für $\omega \in \Omega \setminus A$ $\lim_t X_t(\omega)$ existiert, d.h. wegen $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1$ \mathbb{P} -f.s.

Es bleibt zu zeigen, dass $X_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} X_t \in \mathcal{L}^1$. Mit dem Lemma von Fatou folgt allerdings

$$\mathbb{E} |X_\infty| = \mathbb{E}(\liminf_t |X_t|) \leq \liminf_t \underbrace{\mathbb{E}(|X_t|)}_{\leq \sup_t \mathbb{E}|X_t|} < \infty.$$

□

Bemerkung:

Für ein Sub-Martingal X gilt $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E} X_t^+ < \infty \Leftrightarrow \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, denn

$$\mathbb{E}(|X_t|) = 2\mathbb{E}(X_t^+) - \mathbb{E}(X_t) \leq 2\mathbb{E} X_t^+ - \mathbb{E} X_0.$$

Also gilt $\mathbb{E}(|X_t|) \leq 2C - \mathbb{E}(X_0) < \infty$. Die andere Richtung ist trivial.

Satz 1.3.9:

Sei X ein rechtsstetiges, nichtnegatives Supermartingal. Dann existiert $X_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ \mathbb{P} -f.s., X_∞ ist in \mathcal{L}^1 und $(X_t)_{t \in [0,\infty]}$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,\infty]}$ -Super-MG.

Beweis:

$Y_t := -X_t$ ist ein Submartingal mit $\mathbb{E} Y_t^+ = \mathbb{E}((-X_t)^+) = 0$ für alle $t \geq 0$. Daher folgen die \mathbb{P} -f.s. Konvergenz und $X_\infty \in \mathcal{L}^1$ aus Satz 1.3.8.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \leq X_t$ \mathbb{P} -f.s. gilt. Mit dem Satz von Fatou für bedingte Erwartungswerte und der Supermartingal-Eigenschaft von X folgt

$$\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \leq \liminf_s \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_t) \leq X_t \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

□

Satz 1.3.10:

Sei X ein rechtsstetiges Submartingal. Dann gilt (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) in

- (a) $\{X_t : t \geq 0\}$ ist gleichgradig integrierbar.
- (b) $(X_t)_t$ konvergiert in \mathcal{L}^1 .
- (c) $(X_t)_t$ konvergiert \mathbb{P} -f.s. gegen $X_\infty \in \mathcal{L}^1$ und $(X_t)_{t \in [0, \infty]}$ ist ein \mathcal{F}_t -Submartingal.

Gilt darüber hinaus $X_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$, so gilt (c) \Rightarrow (a).

Beweis:

(a) \Rightarrow (b): Aus der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt $\sup_t \mathbb{E} |X_t| < \infty \Leftrightarrow \sup_t \mathbb{E}(X_t^+) < \infty$. Satz 1.3.8 zeigt die \mathbb{P} -f.s. Konvergenz und aus der \mathbb{P} -f.s. Konvergenz und der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt \mathcal{L}^1 -Konvergenz.

(b) \Rightarrow (c): Aus der \mathcal{L}^1 -Konvergenz folgt $\sup_t \mathbb{E} |X_t| < \infty$, also die \mathbb{P} -f.s. Konvergenz nach Satz 1.3.8. Ferner gilt mit dem Lemma von Fatou

$$\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \geq \limsup_s \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_t) \geq X_t.$$

(c) \Rightarrow (a): Für $X_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$ folgt, dass $0 \leq X_t \leq \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t)$ gleichgradig integrierbar ist. \square

Satz 1.3.11:

Sei X ein rechtsstetiges Martingal. Es sind äquivalent:

- a) X ist gleichgradig integrierbar.
- b) X konvergiert \mathbb{P} -f.s. und in \mathcal{L}^1 gegen X_∞ .
- c) Das Martingal ist abschließbar, d.h. es existiert ein $Z \in \mathcal{L}^1$ mit $X_t = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_t)$ \mathbb{P} -f.s. für alle $t \geq 0$.

Beweis:

(a) \Rightarrow (b): Mit dem vorigen Satz.

(b) \Rightarrow (c): Setze $Z := X_\infty \in \mathcal{L}^1$. Zu zeigen ist $X_s = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_s)$ \mathbb{P} -f.s. Sei dazu $t \geq s$, so gilt

$$\begin{aligned} \|X_s - \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_s)\|_{\mathcal{L}^1} &= \|\mathbb{E}(X_t - X_\infty | \mathcal{F}_s)\|_{\mathcal{L}^1} \\ &\leq \mathbb{E} |X_t - X_\infty| = \|X_t - X_\infty\|_{\mathcal{L}^1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \leq X_t$ \mathbb{P} -f.s. Dazu wende wieder das Lemma von Fatou für bedingte Erwartungswerte und die Supermartingal-Eigenschaft an:

$$\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \leq \liminf_s \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_t) \leq X_t \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

\square

Satz 1.3.12 (Optionaler Stoppsatz):

Sei $(X_t)_{t \in [0, \infty]}$ ein rechtsstetiges Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ und $\sigma \leq \tau$ Optionszeiten bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$. Dann gelten

a) Es gilt

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_{\sigma+}) \geq X_\sigma \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

wobei $\mathcal{F}_{\sigma+} := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} \quad \forall t \geq 0\}$.

b) Falls σ eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ ist, so gilt

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

c) Daraus folgt

$$\mathbb{E} X_\tau \geq \mathbb{E} X_\sigma \geq \mathbb{E} X_0.$$

d) Ist $(X_t)_{t \in [0, \infty]}$ ein Martingal, so gilt in a) bis c) Gleichheit.

Beweis:

a) \Rightarrow b): Sei σ eine Stoppzeit und sei $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Dann gilt $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$, d.h. $A \in \mathcal{F}_{\sigma+}$. Aus a) folgt

$$\int_A X_\tau d\mathbb{P} \stackrel{(a)}{\geq} \int_A X_\sigma d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma+},$$

d.h. es gilt $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma$ \mathbb{P} -f.s.

a): Wir zeigen dies nur für den Martingalfall. Der Fall des Submartingals ist eine Übung.

i) Reduktion auf diskrete Zeit: Definiere dafür

$$\sigma_n := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq \sigma(\omega) < \frac{k}{2^n}\} \text{ auf } k \leq 2^{2n} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

und analog für τ_n . Beachte:

- σ_n und τ_n sind für festes n beschränkte Stoppzeiten (abgesehen von $+\infty$).
- σ_n und τ_n sind ebenfalls Stoppzeiten. Sei dazu $t > 0$ beliebig. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}$. Es gilt $\sigma_n \leq t \Leftrightarrow \sigma < \frac{k}{2^n}$ für ein $k \leq 2^{2n}$, d.h. es gilt

$$\{\sigma_n \leq t\} = \begin{cases} \{\sigma < \frac{k}{2^n}\} & \text{falls } k \leq 2^{2n} \\ \{\sigma < 2^n\} & \text{sonst} \end{cases} \in \begin{cases} \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} & \text{für } k \leq 2^{2n} \\ \mathcal{F}_{2^n} & \text{sonst} \end{cases} \in \mathcal{F}_t$$

- σ_n und τ_n nehmen nur endlich viele Werte an: $\{\frac{k}{2^n} : k \leq 2^{2n}\} \cup \{\infty\}$.
- $\sigma_n \leq \tau_n$ wegen $\sigma \leq \tau$.
- $\sigma_n \downarrow \sigma$ und $\tau_n \downarrow \tau$.

- $\sigma_n \geq \sigma_{n+1}$.

Sei n bis auf weiteres fest. $X_{\frac{k}{2^n}}$ ist ein $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_k$ -Martingal. Doob's optionaler Stopp-satz 1.2.15 zeigt

$$\mathbb{E}(X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}.$$

Es gilt also für alle $A \in \mathcal{F}_{\sigma_n}$

$$\int_A X_{\tau_n} d\mathbb{P} = \int_A X_{\sigma_n} d\mathbb{P}. \quad (*)$$

Dies gilt insbesondere für alle $A \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\sigma_k}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} A \in \bigcap_k \mathcal{F}_{\sigma_k} &\Leftrightarrow A \cap \{\sigma_k \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \quad \forall k \\ &\Rightarrow A \cap \bigcap_k \{\sigma_k \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} \quad \forall t \Rightarrow A \in \mathcal{F}_{\sigma^+}. \end{aligned}$$

Verwende (*) nur noch für $A \in \mathcal{F}_{\sigma^+}$.

ii) **Ziel:** Limes $n \rightarrow \infty$ in (*) für $A \in \mathcal{F}_{\sigma^+}$.

Dazu benötigen wir die Konvergenz von X_{τ_n} und X_{σ_n} in \mathcal{L}^1 . Es gilt die \mathbb{P} -f.s. Konvergenz, d.h. $X_\tau = \lim_n X_{\tau_n}$ und $X_\sigma = \lim_n X_{\sigma_n}$ \mathbb{P} -f.s. weil $\sigma_n \downarrow \sigma$ und $\tau_n \downarrow \tau$ sowie der Rechtsstetigkeit von $(X_t)_t$.

Zeige also die gleichgradige Integrierbarkeit, dann folgt die Behauptung. Nun ist $(X_{\sigma_n})_n$ ein $(\mathcal{F}_{\sigma_n})_n$ -Rückwärtsmartingal, da es integrierbar und adaptiert ist und es gilt $\mathbb{E}(X_{\sigma_n} | \mathcal{F}_{\sigma_{n+1}}) = X_{\sigma_{n+1}}$ \mathbb{P} -f.s. (OST in diskreter Zeit). Ferner ist $E := \lim_n \mathbb{E} X_{\sigma_n} = \mathbb{E} X_0 > -\infty$ und damit folgt aus der Übung die gleichgradige Integrierbarkeit.

□

Beispiel 1.3.13 (Poisson-Prozess):

Sei $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. ZV, wobei $T_i \sim \exp(\lambda)$ für $\lambda > 0$. Setze $S_0 = 0$ und $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ für $n \geq 1$ (Ankunftszeiten). Definiere $N_t := \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$ für alle $t \in [0, \infty)$ als die Ankünfte bis zur Zeit t . Dann ist $(N_t)_t$ ein \mathbb{N}_0 -RCLL stochastischer Prozess. Definiere $\mathcal{F}_t^N := \sigma(N_s : s \leq t)$. Im letzten Semester wurde gezeigt:

- $(N_t)_t$ hat unabhängige Zuwächse.
- Daher ist $N_t - N_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s für alle s .
- $N_t - N_s$ ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda(t - s)$.

Zeige noch, dass $(N_t)_t$ ein Submartingal ist. Dafür sei $t > s$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(N_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(N_s + (N_t - N_s) | \mathcal{F}_s) = N_s + \mathbb{E}(N_t - N_s) = N_s + \lambda(t - s) \geq N_s.$$

Definition 1.3.14 (kompensierter Poisson-Prozess):

Definiere $M_t = N_t - \lambda t$ für alle $t \geq 0$. Beachte, dass $\mathcal{F}_t^N = \mathcal{F}_t^M$ für alle $t \geq 0$ gilt. Dann ist $(M_t)_t$ ein Martingal.

Bemerkung:

Es gilt $N_t = M_t + \lambda t$, d.h. ist die Summe von einem Martingal und einem wachsenden, vorhersagbaren Prozess. Vergleiche auch die Doobsche Martingalzerlegung.

1.4. Doob-Meyer-Zerlegung

Definition 1.4.1 (Aufsteigende Zufallsfolge):

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $(\mathcal{F}_n)_n$ eine Filtrierung von \mathcal{F} und $(A_n)_n$ eine Folge von Zufallsvariablen und A_n sei \mathcal{F}_n -messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt $(A_n)_n$ eine aufsteigende zufällige Folge, wenn $0 = A_0 \leq A_1 \leq \dots$ \mathbb{P} -f.s. und $\mathbb{E}(|A_n|) = \mathbb{E}(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine aufsteigende zufällige Folge $(A_n)_n$ heißt integrierbar, wenn $\mathbb{E}(A_\infty) < \infty$ für $A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Eine beliebige Folge von Zufallsvariablen $(\xi_n)_n$ heißt vorhersagbar (predictable) bezüglich $(\mathcal{F}_n)_n$, wenn $\xi_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung (Martingaltransformation):

Sei $(\xi_n)_n$ eine vorhersagbare Folge mit $\mathbb{E}(|\xi_n|) < \infty$ für alle n und $(M_n)_n$ ein beschränktes Martingal. Dann ist mit

$$Y_0 := 0 \text{ und } Y_n := \sum_{k=1}^n \xi_k (M_k - M_{k-1}) \quad \forall n \geq 1$$

auch $(Y_n)_n$ ein Martingal.

Beweis:

Die Integrierbarkeit ist klar, da jeder Summand die Form $\xi_k (M_k - M_{k-1})$ hat mit $\xi_k \in \mathcal{L}^1$ und (\dots) beschränkt. Es gilt wegen der Vorhersagbarkeit von ξ in (*)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(Y_n + \xi_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n) \\ &\stackrel{(*)}{=} Y_n + \xi_{n+1} \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) = Y_n + \xi_{n+1} \cdot 0 = Y_n. \end{aligned}$$

□

Definition 1.4.2:

Sei $(A_n)_n$ eine aufsteigende zufällige Folge bezüglich $(\mathcal{F}_n)_n$. Dann heißt $(A_n)_n$ natürlich, wenn für alle $n \geq 1$

$$\mathbb{E}(M_n A_n) = \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n M_{k-1} (A_k - A_{k-1}) \right)$$

für alle beschränkten Martingale $(M_n)_n$ gilt.

Bemerkung:

$(A_n)_n$ ist genau dann natürlich, wenn für die Martingaltransformation $Y = (Y_n)_n$ von $(A_n)_n$ durch jedes beschränkte Martingal $\mathbb{E} Y_n = 0$ für $n \geq 1$ erfüllt.

Beweis:

Bezeichne mit M_b die Menge der beschränkten Martingale. Dann gilt

$$(A_n)_n \text{ natürlich} \iff \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(M_k A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_{k-1} A_k) \quad \forall n \quad \forall M \in M_b$$

sowie (beachte, dass $A_0 = 0$)

$$\mathbb{E} Y_n = 0 \quad \forall n \iff \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(A_k M_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(A_k M_{k-1}) \quad \forall n \quad \forall M \in M_b.$$

□

Proposition 1.4.3:

Sei $(A_n)_n$ eine aufsteigende zufällige Folge. Dann gilt

$$(A_n)_n \text{ vorhersahbar} \iff (A_n)_n \text{ natürlich.}$$

Beweis:

” \Rightarrow “: Es gilt

$$\mathbb{E}(M_k A_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_k A_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) = \mathbb{E}(A_k \mathbb{E}(M_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) = \mathbb{E}(A_k M_{k-1})$$

und die Summation über k liefert die Behauptung.

” \Leftarrow “: Sei $(M_n)_n$ ein beliebiges beschränktes Martingal. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(M_n [A_n - \mathbb{E}(A_n \mid \mathcal{F}_{n-1})]) \\ &= \mathbb{E}((M_n - M_{n-1})A_n) + \mathbb{E}(M_{n-1}[A_n - \mathbb{E}(A_n \mid \mathcal{F}_{n-1})]) \\ & - \mathbb{E}((M_n - M_{n-1}) \mathbb{E}(A_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) = 0 \end{aligned}$$

denn

$$\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})A_n) = \mathbb{E}(Y_n) - \mathbb{E}(Y_{n-1}) = 0$$

mit Y aus der Martingaltransformation und weil $(A_n)_n$ natürlich ist, sind alle Erwartungswerte 0. Zweitens ist $\mathbb{E}(A_n - \mathbb{E}(A_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) = 0$ und damit verschwindet der zweite Term (bedinge vorher auf \mathcal{F}_{n-1} und nutze die Eigenschaften der bedingten Erwartung). Weil M ein Martingal ist, gilt

$$\mathbb{E}((M_n - M_{n-1}) \mathbb{E}(A_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1})}_{=0} \mathbb{E}(A_n \mid \mathcal{F}_{n-1})).$$

Sei n fest. Definiere $(M_k^{(n)})_k$ durch

$$M_k^{(n)} := \begin{cases} Z^{(n)} & k \geq n \\ \mathbb{E}(Z^{(n)} \mid \mathcal{F}_k) & k < n \end{cases}$$

mit $Z^{(n)} := \text{sgn}(A_n - \mathbb{E}(A_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) \in \mathcal{F}_n$. Es gilt

- $|M_k^{(n)}| \leq 1$, also ist $(M_k^{(n)})_k$ beschränkt.
- $\mathbb{E}(M_k^{(n)} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}^{(n)}$ für alle k , denn für $k < n$ folgt dies per Definition. Für $k = n$ folgt dies wegen

$$\mathbb{E}(Z^{(n)} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}^{(n)}$$

ebenfalls nach Definition. Für $k > n$ gilt $\mathbb{E}(Z^{(n)} \mid \mathcal{F}_k) = Z^{(n)}$, da $Z^{(n)} \in \mathcal{F}_n$.

Mit dieser Wahl gilt

$$0 = \mathbb{E} \left(\underbrace{M_n^{(n)}}_{=Z^{(n)}} [A_n - \mathbb{E}(A_n | \mathcal{F}_{n-1})] \right) = \mathbb{E}(|A_n - \mathbb{E}(A_n | \mathcal{F}_{n-1})|)$$

woraus $A_n = \mathbb{E}(A_n | \mathcal{F}_{n-1})$ \mathbb{P} -f.s. folgt. Also ist $(A_n)_n$ vorhersehbar. \square

Definition 1.4.4 (aufsteigend):

$(A_t)_t$ heißt aufsteigend, wenn

- 1) $(A_t)_t$ ist $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert
- 2) $A_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s.
- 3) $t \mapsto A_t(\omega)$ ist monoton wachsend und rechtsstetig \mathbb{P} -f.s.
- 4) $\mathbb{E} A_t < \infty$ für alle $t \geq 0$.

Gilt außerdem $\mathbb{E} A_\infty < \infty$ für $A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t$, so heißt $(A_t)_t$ integrierbar.

Definition 1.4.5 (natürlich):

Sei $(A_t)_t$ ein aufsteigender Prozess. Dann heißt $(A_t)_t$ natürlich, wenn

$$\mathbb{E} \left(\int_{[0,t]} M_s dA_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_{[0,t]} M_{s-} dA_s \right) \quad (*)$$

für alle $t \geq 0$ und alle beschränkten, rechtsstetigen Martingale $(M_s)_s$.

Bemerkung 1.4.6:

- i) Die Integrale sind wohldefiniert, falls $(A_t)_t$ aufsteigend ist und $X = (X_t)_t$ ein messbarer stochastischer Prozess. Dann ist für festes $\omega \in \Omega$

$$I_t^\pm(\omega) = \int_{[0,t]} X_s^\pm(\omega) dA_s(\omega)$$

wohldefiniert als Lebesgue-Stieltjes-Integral (d.h. $(A_s(\omega))_s$ induziert ein äußeres Maß). Sofern $I_t^\pm(\omega)$ endlich sind (und wohldefiniert), so definiert $I_t := I_t^+ - I_t^-$ einen stochastischen Prozess.

In unserem Fall ist $(X_t)_t = (M_t)_t$ adaptiert und rechtsstetig. Also definiert $(I_t)_t$ einen rechtsstetigen, progressiv messbaren stochastischen Prozess.

- ii) Ist $(A_t)_t$ aufsteigend und stetig, dann $(A_t)_t$ ist natürlich.

Beweis von (ii):

Gemäß Satz 1.3.5(v) hat $(M_s(\omega))_s$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Also gilt für \mathbb{P} -f.a. ω

$$\int_{[0,t]} (M_s(\omega) - M_{s-}(\omega)) dA_s(\omega) = 0$$

für alle $t > 0$. \square

Lemma 1.4.7:

Sei $(A_t)_t$ aufsteigend und $(M_t)_t$ beschränktes, rechtsstetiges Martingal. Dann gilt

$$\mathbb{E}(M_t A_t) = \mathbb{E} \left(\int_{[0,t]} M_s dA_s \right).$$

Insbesondere gilt (*) aus Definition 1.4.5 genau dann, wenn $\mathbb{E}(\int_{[0,t]} M_s - dA_s) = \mathbb{E}(M_t A_t)$.

Beweis:

Für eine Partition $\Pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ von $[0, t]$ mit $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t$ definiere

$$M_s^\Pi = \sum_{k=1}^n M_{t_k} \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(s).$$

Nutze die Martingaleigenschaft in (*), so gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_{[0,t]} M_s^\Pi dA_s \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n M_{t_k} (A_{t_k} - A_{t_{k-1}}) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n M_{t_k} A_{t_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{M_{t_{k+1}}}_{\stackrel{(*)}{=} M_{t_k}} A_{t_k} \right) \\ &= \mathbb{E}(M_t A_t). \end{aligned}$$

Für $\max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0$ gilt $M_s^\Pi \rightarrow M_s$. Da $(M_s^\Pi)_s$ beschränkt ist durch die Schranke an $(M_s)_s$ für jede Wahl von Π folgt die Behauptung aus dem Satz von Lebesgue. \square

Definition 1.4.8:

Definiere

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \{ \tau : \tau \text{ Stoppzeit bzgl. } (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P}(\tau < \infty) = 1 \} \\ \mathcal{S}_a &:= \{ \tau : \tau \text{ Stoppzeit bzgl. } (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P}(\tau \leq a) = 1 \}. \end{aligned}$$

Sei $(X_t)_t$ rechtsstetig und adaptiert.

- i) $(X_t)_t$ heißt von der Klasse D, wenn $\{X_\tau : \tau \in \mathcal{S}\}$ gleichgradig integrierbar ist.
- ii) $(X_t)_t$ heißt von der Klasse DL, wenn $\{X_\tau : \tau \in \mathcal{S}_a\}$ gleichgradig integrierbar ist für jedes $a > 0$.

Aufgabe 1.4.9:

Sei $(X_t)_t$ ein rechtsstetiges Submartingal mit $X_t \geq 0$ oder $X_t = M_t + A_t$ für jedes $t \geq 0$, wobei M ein Martingal und A ein aufsteigender Prozess.

Dann ist $(X_t)_t$ von der Klasse DL.

Ist $(X_t)_t$ ein gleichgradig integrierbares, rechtsstetiges Martingal, dann ist $(X_t)_t$ von der Klasse D.

Satz 1.4.10 (Doob-Meyer-Zerlegung):

Sei $(X_t)_t$ ein rechtsstetiges Submartingal, $(X_t)_t$ von der Klasse DL und $(\mathcal{F}_t)_t$ erfülle die Standard-Bedingungen. Dann gelten

- a) Es existiert ein rechtsstetiges Martingal $(M_t)_t$ und ein aufsteigender Prozess $(A_t)_t$ mit

$$X_t = M_t + A_t \quad (**)$$

für alle $t \geq 0$.

- b) $(A_t)_t$ kann natürlich gewählt werden.
c) Wenn wir verlangen, dass $(A_t)_t$ natürlich ist, dann ist die Zerlegung eindeutig im Sinne der Ununterscheidbarkeit.
d) Ist $(X_t)_t$ von der Klasse D, dann ist $(M_t)_t$ gleichgradig integrierbar und $(A_t)_t$ integrierbar.

Beweis:

Eindeutigkeit: Sei $X_t = M_t + A_t = M'_t + A'_t$ für alle $t \geq 0$, wobei $(M_t)_t, (M'_t)_t$ rechtss-tetige Martingale und $(A_t)_t, (A'_t)_t$ natürliche, aufsteigende Prozesse. Dann ist

$$Z_t := A_t - A'_t = M'_t - M_t$$

wobei $A_t - A'_t$ die Differenz zweier monotoner Funktionen, also von beschränkter Variation (für festes ω) ist. Sei $(\xi_t)_t$ ein beschränktes, rechtsstetiges Martingal. Nutze in (*), dass A_t und A'_t natürlich sind, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_t(A_t - A'_t)) &\stackrel{\text{Lemma 1.4.7}}{=} \mathbb{E}\left(\int_{(0,t]} \xi_s dA_s - \int_{(0,t]} \xi_s dA'_s\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}\left(\int_{(0,t]} \xi_s dZ_s\right) \\ &\stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{m_n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}} (Z_{t_j^{(n)}} - Z_{t_{j-1}^{(n)}})\right) \end{aligned}$$

für eine Folge von Partitionen $\{t_0^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}\}$ mit $\max_{1 \leq j \leq m_n} |t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}| \rightarrow 0$ und „geschachtelt“. Da $\xi_{t_{j-1}^{(n)}} \in \mathcal{F}_{t_{j-1}^{(n)}}$ und $Z_{t_j^{(n)}} - Z_{t_{j-1}^{(n)}}$ ein Martingal ist, gilt

$$\mathbb{E}\left(\xi_{t_{j-1}^{(n)}} (Z_{t_j^{(n)}} - Z_{t_{j-1}^{(n)}})\right) = 0$$

sodass $\mathbb{E}(\xi_t(A_t - A'_t)) = 0$ für alle t folgt.

Wähle $(\xi_t)_t$ durch $\xi_t := \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$ für alle t und für eine beschränkte Zufallsvariable ξ . Satz 1.3.7 (unter üblichen Bedingungen) zeigt, dass $(\xi_t)_t$ als rechtsstetige Modifikation gewählt werden kann unter Erhalt der Martingal-Eigenschaft. Also gilt

$$0 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_t)(A_t - A'_t)) = \mathbb{E}(\xi_t(A_t - A'_t)).$$

Da ξ beliebig war gilt $A_t = A'_t$ \mathbb{P} -f.s. Da $(A_t)_t, (A'_t)_t$ rechtsstetig sind, folgt also $\mathbb{P}(A_t = A'_t \forall t \geq 0) = 1$.

Existenz:

Schritt 1: Schränke zunächst auf $[0, a]$ ein. Es genügt, dies zu betrachten: verwende dazu die Eindeutigkeit der Fortsetzung auf jedes $[0, T]$.

Schritt 2: Sei also $a > 0$ fest. Führe eine Zeitdiskretisierung durch:

- Definiere $Y_t := X_t - \mathbb{E}(X_a | \mathcal{F}_t)$ für alle $t \in [0, a]$. Dabei ist X_t ein Submartingal und $\mathbb{E}(X_a | \mathcal{F}_t)$ ein Martingal. Daher ist $(Y_t)_t$ ein Submartingal mit $Y_t \leq 0$ \mathbb{P} -f.s. für alle t .
- Betrachte die Partition $\Pi_n := \{t_0^{(n)}, \dots, t_{2^n}^{(n)}\}$ von $[0, a]$ mit $t_j^{(n)} := \frac{j}{2^n}a$ für $j = 0, \dots, 2^n$.
- Nutze die Doobsche Martingalzerlegung in diskreter Zeit: Setze $Y_{t_j}^{(n)} = M_{t_j}^{(n)} + A_{t_j}^{(n)}$ für $j = 0, \dots, 2^n$, wobei A vorhersagbar und aufsteigend ist. Es gilt

$$A_{t_j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{E}(Y_{t_{k+1}}^{(n)} - Y_{t_k}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_k}).$$

- Ferner gilt $Y_a = X_a - \mathbb{E}(X_a | \mathcal{F}_a) = 0$, d.h. $M_a^{(n)} = -A_a^{(n)}$.
- $Y_{t_j}^{(n)} = M_{t_j}^{(n)} + A_{t_j}^{(n)} = A_{t_j}^{(n)} - \mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{t_j})$.

Schritt 3: Zeige, dass $(A_a^{(n)})_n$ gleichgradig integrierbar ist.

Sei dazu $\lambda > 0$ beliebig und $\tau_\lambda = \tau_\lambda^{(n)} := \min\{a, \min\{t_{j-1}^{(n)} : A_{t_j}^{(n)} > \lambda\}\}$, d.h. es gilt $\tau_\lambda \leq t_{j-1} \Leftrightarrow A_{t_j}^{(n)} > \lambda$. Insbesondere gilt $\{\tau_\lambda \leq t_{j-1}\} \in \mathcal{F}_{t_{j-1}}$, da $A^{(n)}$ vorhersehbar ist. Somit ist τ_λ eine Stoppzeit aus \mathcal{S}_a .

- Es gilt $\tau_\lambda < a \Leftrightarrow A_a^{(n)} > \lambda$.
- Auf $\{\tau_\lambda = t_j\}$ gilt $\mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{t_j}) = \mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda})$. Daher gilt auf $\{\tau_\lambda < a\} = \cup_j \{\tau_\lambda = t_j\}$

$$Y_{\tau_\lambda} = A_{\tau_\lambda}^{(n)} - \mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda}) \leq \lambda - \mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda})$$

- Auflösen nach $\mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda})$ und Integration über $\{A_a^{(n)} > \lambda\} = \{\tau_\lambda < a\} \in \mathcal{F}_{\tau_\lambda}$ führt auf

$$\int_{\{A_a^{(n)} > \lambda\}} A_a^{(n)} d\mathbb{P} \leq \lambda \mathbb{P}(\tau_\lambda < a) - \int_{\{\tau_\lambda < a\}} Y_{\tau_\lambda} d\mathbb{P}.$$

Analog für $\frac{\lambda}{2}$ statt λ unter Verkleinerung des Integrationsbereiches in (*) führt zu

$$\begin{aligned} - \int_{\{\tau_{\lambda/2} < a\}} Y_{\tau_{\lambda/2}} d\mathbb{P} &= \int_{\{\tau_{\lambda/2} < a\}} (A_a^{(n)} - A_{\tau_{\lambda/2}}) d\mathbb{P} \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \int_{\{\tau_\lambda < a\}} \left(\lambda - \frac{\lambda}{2} \right) d\mathbb{P} = \frac{\lambda}{2} \mathbb{P}(\tau_\lambda < a). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also

$$\int_{\{A_a^{(n)} > \lambda\}} A_a^{(n)} d\mathbb{P} \leq -2 \int_{\{\tau_{\lambda/2} < a\}} Y_{\tau_{\lambda/2}} d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda < a\}} Y_{\tau_\lambda} d\mathbb{P}.$$

Nach Voraussetzung ist $(X_t)_t$ aus der Klasse DL, d.h. $\{X_\tau : \tau \in \mathcal{S}_a\}$ ist gleichgradig integrierbar. Da $Y_t = X_t - \mathbb{E}(X_a | \mathcal{F}_t)$, ist auch $\{Y_\tau : \tau \in \mathcal{S}_a\}$ gleichgradig integrierbar. Eine Nebenrechnung zeigt mit Hilfe der Markoff-Ungleichung $\mathbb{P}(\tau_\lambda^{(n)} < a) = \mathbb{P}(A_a^{(n)} > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(A_a^{(n)})}{\lambda}$

$$\mathbb{E}(A_a^{(n)}) = -\mathbb{E}(M_a^{(n)}) = -\mathbb{E} M_0^{(n)} = -\mathbb{E} Y_0$$

da $A_a^{(n)} = -M_a^{(n)}$ und $A_0^{(n)} = 0$ \mathbb{P} -f.s.. Damit folgt also auch

$$\mathbb{P}(\tau_\lambda^{(n)} < a) \leq -\frac{\mathbb{E} Y_0}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig in n . Daher gilt zusammengefasst

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_a^{(n)} > \lambda} A_a^{(n)} d\mathbb{P} = 0$$

weil $(Y_\tau)_\tau$ gleichgradig integrierbar ist und wegen $\mathbb{P}(\tau_\lambda^{(n)} < a) \rightarrow 0$.

Schritt 4: Nutze das Dunford-Pettis-Kompaktheitskriterium: $(X_n)_n \subset \mathcal{L}^1$ ist gleichgradig integrierbar genau dann, wenn $(X_n)_n$ relativ kompakt in der schwachen Topologie bezüglich $(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^\infty)$ ist.

Hier ist $(A_a^{(n)})_n$ gleichgradig integrierbar, also existiert eine integrierbare Zufallsvariable A_a und eine Teilfolge $(n_k)_k \uparrow \infty$, sodass $A_a^{(n_k)} \rightarrow A_a$ schwach in \mathcal{L}^1 . Dies bedeutet, dass für jede beschränkte Zufallsvariable ξ gilt

$$\mathbb{E}(\xi A_a^{(n_k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi A_a).$$

Ohne Einschränkung sei $n_k = k$. Definiere $A_t = Y_t + \mathbb{E}(A_a | \mathcal{F}_t)$ für alle $t \in [0, a]$ als rechtsstetige Modifikation. Für jedes t , das in einer Partition vorkommt, d.h. $t \in \Pi := \cup_{n \geq 1} \Pi_n$, gilt

$$A_t^{(n)} = Y_t + \underbrace{\mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_t)}_{\rightarrow \mathbb{E}(A_a | \mathcal{F}_t) \text{ schwach in } \mathcal{L}^1}$$

mit Hilfe der Aufgabe 1.4.11.

Schritt 5: Zeige, dass $(A_t)_t$ aufsteigend ist. Dazu seien $s, t \in \Pi, 0 \leq s < t \leq a$ und $\xi \geq 0$ eine beschränkte Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\xi(A_t - A_s)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi(A_t^{(n)} - A_s^{(n)})) \geq 0,$$

und mit $\xi := \mathbb{1}_{\{A_s > A_t\}}$ folgt $A_s \leq A_t$ \mathbb{P} -f.s.

Da Π dicht ist, folgt, dass $t \mapsto A_t(\omega)$ \mathbb{P} -f.s. monoton wachsend auf Π ist. Mit Hilfe der Rechtsstetigkeit folgt die Monotonie auf $[0, a]$ \mathbb{P} -f.s.

Klar ist die Adaptiertheit, $A_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s. (überträgt sich von $(A_0^{(n)})_n$) und $A_t \in \mathcal{L}^1$ für alle t per Definition von A_a .

Schritt 6: Zeige, dass $(A_t)_t$ natürlich ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, da $(A_a^{(n)})_n$ natürlich ist,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_a A_a^{(n)}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}}^{(n)} (A_{t_j}^{(n)} - A_{t_{j-1}}^{(n)})\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}}^{(n)} (Y_{t_j}^{(n)} - Y_{t_{j-1}}^{(n)})\right)\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ $\mathbb{E} A_t^{(n)} = \mathbb{E}(Y_t + \text{MG})$ eingeht. Bilde den Limes $n \rightarrow \infty$, so gilt wegen der schwachen \mathcal{L}^1 -Konvergenz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_a A_a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_a A_a^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}}^{(n)} (A_{t_j}^{(n)} - A_{t_{j-1}}^{(n)})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{(0,a]} \xi_{s-} dA_s\right).\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.4.7 gilt $\mathbb{E}\left(\int_{(0,a]} \xi_s dA_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_{(0,a]} \xi_{s-} dA_s\right)$ für jedes rechtsstetige Martingal. Ersetze also $(\xi_s)_s$ durch $(\xi_{t \wedge s})_s$ für ein beliebiges $t \in [0, a]$, so gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_{(0,t]} \xi_s dA_s\right) &= \mathbb{E}\left(\int_{(0,a]} \xi_{t \wedge s} dA_s\right) - \mathbb{E}\left(\int_{(t,a]} \xi_t dA_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{(0,a]} \xi_{(t \wedge s)-} dA_s\right) - \mathbb{E}\left(\int_{(t,a]} \xi_{t-} dA_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{(0,t]} \xi_{s-} dA_s\right).\end{aligned}$$

denn es gilt für alle beschränkten rechtsstetigen Martingale $(\xi_s)_s$

$$\mathbb{E}\left(\int_{(0,a]} \xi_s dA_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_{(0,a]} \xi_{s-} dA_s\right).$$

Wähle für ein beliebiges, rechtsstetiges Martingal $(\xi_s)_s$ $(\tilde{\xi}_{s \wedge t})_s$ und setze dieses ein, so gilt

$$\begin{aligned}\int_{(0,a]} \tilde{\xi}_s dA_s &= \int_{(0,t]} \xi_s dA_s + \xi_t [A_a - A_t] \\ &= \int_{(0,a]} \tilde{\xi}_{s-} dA_s \longrightarrow \int_{(0,t]} \xi_{s-} dA_s + \xi_t [A_a - A_t]\end{aligned}$$

denn $\lim_{n \uparrow s} \xi_{n \wedge t} = \begin{cases} \xi_{s-} & s < t \\ \xi_{t-} & s = t \\ \xi_t & s > t \end{cases}$. Damit gilt $\mathbb{E}\left(\int_{(0,t]} \xi_s dA_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_{(0,t]} \xi_{s-} dA_s\right)$.

Schritt 7: $M_t := \mathbb{E}(X_a - A_a \mid \mathcal{F}_t)$ ist nach Definition ein Martingal und es gilt

$$X_t = Y_t + \mathbb{E}(X_a \mid \mathcal{F}_t) = A_t - \mathbb{E}(A_a \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(X_a \mid \mathcal{F}_t) = A_t + M_t.$$

Der Zusatz, falls $(X_t)_t$ von der Klasse D ist, ist eine Übung. □

Aufgabe 1.4.11:

Gegeben sei eine Folge integrierbarer Zufallsvariablen $(Z^{(n)})_n$ mit $Z^{(n)} \rightarrow Z$ schwach in \mathcal{L}^1 . Dann gilt für jede beliebige σ -Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ auch $\mathbb{E}(Z^{(n)} | \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{E}(Z | \mathcal{G})$ schwach in \mathcal{L}^1 .

Beweis:

Sei ξ eine beliebige beschränkte Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\xi \mathbb{E}(Z^{(n)} | \mathcal{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \mathbb{E}(Z^{(n)} | \mathcal{G}) | \mathcal{G})) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(\xi | \mathcal{G})}_{=:\tilde{\xi}} \mathbb{E}(Z^{(n)} | \mathcal{G}))$$

für eine beschränkte Zufallsvariable $\tilde{\xi} \in \mathcal{G}$. Wegen der Voraussetzung gilt $\mathbb{E}(\tilde{\xi} Z^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{\xi} Z) = \dots = \mathbb{E}(\tilde{\xi} \mathbb{E}(Z | \mathcal{G}))$. □

Definition 1.4.12 (regulär):

Sei $(X_t)_t$ ein Submartingal. Dann heißt $(X_t)_t$ regulär, falls $\mathbb{E} X_{\tau_n} \rightarrow \mathbb{E} X_\tau$ für alle Folgen $\tau_n \uparrow \tau$ mit $\tau_n, \tau \in \mathcal{S}_a$ und alle $a \in (0, \infty)$.

Aufgabe 1.4.13:

Ein stetiges, nichtnegatives Submartingal ist regulär.

Satz 1.4.14:

Sei $(X_t)_t$ ein rechtsstetiges Submartingal und von der Klasse DL , $(\mathcal{F}_t)_t$ erfülle die üblichen Bedingungen und $(A_t)_t$ sei der natürliche, aufsteigende Prozess aus der Doob-Meyer-Zerlegung. Dann gilt

$$(A_t)_t \text{ stetig} \iff (X_t)_t \text{ regulär.}$$

1.5. Stetige, quadratisch integrierbare Martingale

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $(\mathcal{F}_t)_t$ eine Filtrierung von \mathcal{F} und $(\mathcal{F}_t)_t$ erfülle die üblichen Bedingungen.

Definition 1.5.1 (quadratisch integrierbar):

Sei $(X_t)_t$ ein rechtsstetiges Martingal.

- (a) $X = (X_t)_t$ heißt quadratisch integrierbar, wenn $\mathbb{E} X_t^2 < \infty$ für alle t .
- (b) Wir sagen $X \in \mathcal{M}_2$, falls X quadratisch integrierbar ist und $X_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s. gilt.
- (c) Hat $X \in \mathcal{M}_2$ zusätzlich stetige Pfade (\mathbb{P} -f.s. stetig), so sagen wir $X \in \mathcal{M}_2^c$.

Bemerkung 1.5.2:

Ist $X \in \mathcal{M}_2$, so ist $(X_t^2)_t$ ein nichtnegatives Submartingal. Nach der Übung folgt daraus, dass $(X_t^2)_t$ von der Klasse DL ist. Nach der Doob-Meyer-Zerlegung gilt also $X_t^2 = M_t + A_t$ für $t \geq 0$, wobei M ein rechtsstetiges Martingal und A ein natürlicher, aufsteigender Prozess. Ist $X \in \mathcal{M}_2$, so gilt $X_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s.. Ist $X \in \mathcal{M}_2^c$, so gilt nach Satz 4.14, dass $(A_t)_t$ und $(M_t)_t$ stetig sind.

Definition 1.5.3 (quadratische Variation von X):

Sei $X \in \mathcal{M}_2$. Definiere $\langle X \rangle_t := A_t$ mit A_t aus der Doob-Meyer-Zerlegung von $(X_t^2)_t$, wobei $(A_t)_t$ natürlich und aufsteigend.

Bemerkung:

$(\langle X \rangle_t)_t$ ist ein \mathbb{P} -f.s. eindeutiger, adaptierter, natürlicher und aufsteigender Prozess mit $\langle X \rangle_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s. derart, dass $(X_t^2 - \langle X \rangle_t)_t$ ein Martingal ist.

Beispiel 1.5.4 (kompensierter Poisson-Prozess):

Sei $(N_t)_t$ ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda > 0$. $(\mathcal{F}_t)_t$ erfülle die üblichen Bedingungen und $(N_t)_t$ sei $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert. Dann ist $M_t = N_t - \lambda \cdot t$ ein Martingal mit $M = (M_t)_t \in \mathcal{M}_2$ (nachrechnen) und $\langle M \rangle_t = \lambda \cdot t$ für alle t .

Beweis:

Es genügt zu zeigen, dass $(M_t^2 - \lambda t)_t$ ein Martingal ist. Dazu nutze die Unabhängigkeit von $N_t - N_s$ von \mathcal{F}_s in (*) sowie, dass für $Z \sim Poi(\lambda)$ $\mathbb{E} Z = \text{Var } Z = \lambda$ gilt, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t^2 \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((N_t - \lambda t)^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(((N_t - N_s) + (N_s - \lambda t))^2 \mid \mathcal{F}_s) \\ &\stackrel{(*)}{=} \text{Var}(N_t - N_s) + (\mathbb{E}(N_t - N_s)^2) + \dots \\ &= \lambda(t - s) + \lambda^2(t - s)^2 + 2(N_s - \lambda t)\lambda(t - s) + (N_s - \lambda t)^2. \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t^2 - \lambda t \mid \mathcal{F}_s) - (M_s^2 - \lambda s) &= \lambda(t - s) + \lambda^2(t - s)^2 + 2\lambda(t - s)(N_s - \lambda t) \\ &\quad + (N_s - \lambda t)^2 - \lambda t - (N_s - \lambda s)^2 + \lambda s \\ &= \dots = 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Seien $X, Y \in \mathcal{M}_2$, so sind $(X + Y)^2 - \langle X + Y \rangle$ und $(X - Y)^2 - \langle X - Y \rangle$ Martingale. Indem man subtrahiert, erhält man, dass

$$(X + Y)^2 - \langle X + Y \rangle - (X - Y)^2 + \langle X - Y \rangle = 4XY - (\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle)$$

ebenfalls ein Martingal ist.

Definition 1.5.5 (quadratische Kovariation):

Seien $X, Y \in \mathcal{M}_2$. Dann heißt

$$\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4} (\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t)$$

quadratische Kovariation von X und Y . Insbesondere ist $XY - \langle X, Y \rangle$ ein Martingal. X, Y heißen orthogonal, wenn $\langle X, Y \rangle_t = 0$ \mathbb{P} -f.s. für jedes $t \geq 0$.

Bemerkung 1.5.6:

Sind $X, Y \in \mathcal{M}_2$. Dann sind äquivalent:

- i) X, Y orthogonal
- ii) $\langle X, Y \rangle_t = 0$ für alle t (per Definition)
- iii) $X \cdot Y$ ist ein Martingal (wegen der Eindeutigkeit von $(A_t)_t$)
- iv) $\mathbb{E}((X_t - X_s)(Y_t - Y_s) \mid \mathcal{F}_s) = 0$ für alle $s \leq t$ (siehe Rechnung)
- v) die Zuwächse $X_t - X_s, Y_t - Y_s$ sind bedingt unabhängig gegeben \mathcal{F}_s für alle $s \geq 0$ und $t \geq s$.

Zum vierten Punkt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_t - X_s)(Y_t - Y_s) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(X_t Y_t - X_s Y_t - X_s Y_t + X_s Y_s \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(X_t Y_t \mid \mathcal{F}_s) - X_s Y_s - X_s Y_s + X_s Y_s \\ &= \mathbb{E}(X_t Y_t - X_s Y_s \mid \mathcal{F}_s) \quad \forall s \leq t \\ &= 0 \quad \forall s \leq t \Leftrightarrow (X_t Y_t)_t \text{ ist ein Martingal.} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.5.7:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Bilinearform auf \mathcal{M}_2 . Für $X, Y, Z \in \mathcal{M}_2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechenregeln:

- i) $\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle$.
- ii) $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$
- iii) $|\langle X, Y \rangle_t|^2 \leq \langle X, X \rangle_t \langle Y, Y \rangle_t$ für alle $t \geq 0$.

iv) Sei $\hat{\xi}_t(\omega)$ die totale Variation (im Sinne der Analysis) von $(\langle X, Y \rangle_s(\omega))_s$ auf dem Intervall $[0, t]$. Dann gilt für \mathbb{P} -f.a. ω

$$\hat{\xi}_t(\omega) - \hat{\xi}_s(\omega) \leq \frac{1}{2} (\langle X \rangle_t(\omega) - \langle X \rangle_s(\omega) + \langle Y \rangle_t(\omega) - \langle Y \rangle_s(\omega)).$$

Definition (p -Variation):

Sei $X = (X_t)_t$ ein stochastischer Prozess, und $t > 0$ beliebig, $\Pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ eine Partition von $[0, t]$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ und $p > 0$. Die p -Variation von X über Π ist definiert als

$$V_t^{(p)}(\Pi) := \sum_{k=1}^n |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p.$$

Für $p = 2$ heißt dies quadratische Variation. Definiere die Feinheit einer Unterteilung Π durch $\|\Pi\| := \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$.

Satz 1.5.8 (Quadratische Variation für stetige Martingale):

Sei $X \in \mathcal{M}_2^c$ und $t > 0$ fest. Dann gilt

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} V_t^{(2)}(\Pi) = \langle X \rangle_t$$

in Wahrscheinlichkeit.

Vorbereitungen:

Sei $X \in \mathcal{M}_2$, $0 \leq s < t \leq u < v$. Dann gilt

$$\mathbb{E}((X_v - X_u)(X_t - X_s)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\dots | \mathcal{F}_u)) = \mathbb{E}((X_t - X_s)(\mathbb{E}(X_v - X_u | \mathcal{F}_u))) = 0,$$

d.h. der Erwartungswert gemischter Terme fällt weg.

Ferner

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_v^2 - X_u^2 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}((X_v - X_u)^2 | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}((X_v^2 - \langle X \rangle_v) - (X_u^2 - \langle X \rangle_u) | \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\langle X \rangle_v - \langle X \rangle_u | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\langle X \rangle_v - \langle X \rangle_u | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Lemma 1.5.9:

Sei $X \in \mathcal{M}_2$ und $|X_s| \leq K < \infty$ für alle $s \leq t$ \mathbb{P} -f.s. und $\Pi = \{t_0, \dots, t_m\}$ eine Partition von $[0, t]$ wie oben. Dann gilt

$$\mathbb{E} \left(\left(V_t^{(2)}(\Pi) \right)^2 \right) \leq 6K^4.$$

Beweis:

Sei $0 \leq k \leq m - 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{j=k+1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k} \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=k+1}^m X_{t_j}^2 - 2X_{t_j}X_{t_{j-1}} + X_{t_{j-1}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_k} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=k+1}^m (X_{t_j}^2 - X_{t_{j-1}}^2) \mid \mathcal{F}_{t_k} \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\underbrace{X_{t_m}^2}_{\leq K^2} \mid \mathcal{F}_{t_m} \right) \leq K^2. \end{aligned}$$

Ebenfalls gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{E} \left(\sum_{j=k+1}^m (\dots)^2 (\dots)^2 \mid \mathcal{F}_{t_k} \right) \right) \stackrel{\text{Teil 1}}{\leq} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{m-1} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 K^2 \right) \\ &\leq K^2 \mathbb{E} \left(\sum_{j=k+1}^{m-1} \mathbb{E} \left((\dots)^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}} \right) \right) = K^2 \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{E} (X_{t_k}^2 - X_{t_{k-1}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \right) \\ &= K^2 \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{m-1} (X_{t_k}^2 - X_{t_{k-1}}^2) \right) \leq K^2 \mathbb{E} \left(\underbrace{X_{t_{m-1}}^2}_{\leq K^2} \right) \leq K^4. \end{aligned}$$

Also erhalten wir zusammen

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(V_t^{(2)}(\Pi) \right)^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=1}^m (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \right)^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbb{E} \left((X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^4 \right) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^m \mathbb{E} \left((X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \right) \\ &\leq 4K^4 + 2K^4 = 6K^4. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.5.10:

Sei $X \in \mathcal{M}_2^c$ mit $|X_s| \leq K < \infty$ für alle $s \leq t$ \mathbb{P} -f.s. Dann gilt

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \mathbb{E} V_t^{(4)}(\Pi) = 0.$$

Beweis:

Es gilt

$$V_t^{(4)}(\Pi) = \sum_{k=1}^m |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2 \underbrace{|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2}_{\leq m_t(X, \|\Pi\|)^2}$$

mit

$$\begin{aligned} m_t(X, \delta) &:= \sup\{|X_u - X_v| : \leq v \leq u \leq t, u - v \leq \delta\} \\ &= \sup\{|X_u - X_v| : 0 \leq u \leq v \leq t, u - v \leq \delta, u, v \in \mathbb{Q}\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt aufgrund der Stetigkeit der Pfade. Es gilt $m_t(X, \delta) \leq 2K$ für alle $\delta > 0$. Somit gilt nach Cauchy-Schwarz und Lemma 4.10

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(V_t^{(4)}(\Pi) \right) &\leq \left(\mathbb{E} \left(V_t^{(2)}(\Pi) \right)^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left(m_t(X, \|\Pi\|)^4 \right) \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{6K^4} \left(\mathbb{E} \left(m_t(X, \|\Pi\|)^4 \right) \right)^{1/2} \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

da für $\|\Pi\| \rightarrow 0$ auch wegen der Stetigkeit der Pfade und wegen der Beschränktheit nach dem Satz von Lebesgue $m_t(X, \|\Pi\|) \rightarrow 0$ gilt. \square

Beweis von Satz 1.5.8:

Schritt 1: Angenommen $|X_s| \leq K < \infty$ und $\langle X \rangle_s \leq K$ für alle $s \leq t$ \mathbb{P} -f.s.. Sei $\Pi = \{t_0, \dots, t_m\}$ mit $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = t$ eine Partition. In diesem Fall gilt sogar \mathcal{L}^2 -Konvergenz, denn

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\left(V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X \rangle_t \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=1}^m (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 - \left(\langle X \rangle_{t_k} - \langle X \rangle_{t_{k-1}} \right) \right)^2 \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^m \mathbb{E} \left((\dots)_k (\dots)_l \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^m \mathbb{E} \left((\dots)_k^2 \right) + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq m} \mathbb{E} (\dots)_k \mathbb{E} (\dots)_l \mid \mathcal{F}_{t_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \left[\left(2 \mathbb{E} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^4 \right) + 2 \mathbb{E} \left(\left(\langle X \rangle_{t_k} - \langle X \rangle_{t_{k-1}} \right) \right) \right] \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left(V_t^{(4)}(\Pi) \right) + 2 \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^m \left(\langle X \rangle_{t_k} - \langle X \rangle_{t_{k-1}} \right) \cdot m_t(\langle X \rangle, \|\Pi\|) \right) \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left(V_t^{(4)}(\Pi) \right) + 2 \underbrace{\left(\langle X \rangle \right)}_{\leq K} \cdot \underbrace{m_t(\langle X \rangle, \|\Pi\|)}_{\rightarrow 0} \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.11}}{\xrightarrow{}} 0 \text{ für } \|\Pi\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

mit dem Satz von Lebesgue im letzten Schritt. Dabei verschwinden die bedingten Erwartungswerte (vgl. Vorbereitung (b)) in (*).

Schritt 2: Lokalisieren: Setze $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n \text{ oder } \langle X \rangle_t \geq n\}$. Dann ist

$X_t^{(n)} := X_{\tau_n \wedge t}$ ein beschränktes Martingal aus \mathcal{M}_2^c . Beachte, dass $X_{\tau_n \wedge t}^2 - \langle X \rangle_{t \wedge \tau_n}$ ein beschränktes Martingal ist. Nach der Eindeutigkeit der Doob-Meyer-Zerlegung gilt

$$\langle X^{(n)} \rangle_t = \langle X \rangle_{t \wedge \tau_n}.$$

Anwendung des ersten Schrittes für festes n zeigt

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=1}^m (X_{t_k \wedge \tau_n} - X_{t_{k-1} \wedge \tau_n})^2 - \langle X \rangle_{t \wedge \tau_n} \right)^2 \right) = 0.$$

Für $t > 0$ fest und $n \rightarrow \infty$ folgt $\tau_n \uparrow \infty$ \mathbb{P} -f.s. Daher gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_n < t) = 0$. Damit gilt für ein beliebiges $\delta > 0$ und alle Partitionen Π

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\left| \sum_{k=1}^m (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 - \langle X \rangle_t \right| \geq \delta \right) \\ & \leq \mathbb{P}(\tau_n < t) + \mathbb{P} \left(\tau_n \geq t, \left| \sum_{k=1}^m (X_{t_k \wedge \tau_n} - X_{t_{k-1} \wedge \tau_n})^2 - \langle X \rangle_{t \wedge \tau_n} \right| \geq \delta \right) \\ & \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} \mathbb{P}(\tau_n < t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.5.11:

Sei $(X_t)_t$ ein stochastischer Prozess, der stetig und adaptiert ist. Angenommen es existiert ein $p > 0$, sodass für alle $t > 0$

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} V_t^{(p)}(\Pi) = L_t$$

in Wahrscheinlichkeit gilt für eine Zufallsvariable L_t mit $\mathbb{P}(L_t \in [0, \infty)) = 1$. Dann gilt

- $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} V_t^{(q)} = 0$ in Wahrscheinlichkeit für alle $q > p$.
- $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} V_t^{(q)} = \infty$ in Wahrscheinlichkeit für $q \in (0, p)$ auf $\{L_t > 0\}$.

Aufgabe 1.5.12:

Sei $X \in \mathcal{M}_2^c$ und τ eine Stoppzeit. Dann gilt

$$\langle X \rangle_\tau = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \implies \mathbb{P}(X_{t \wedge \tau} = 0 \quad \forall t \geq 0) = 1.$$

Beweis:

1. Beobachtung: Es gilt

$$\mathbb{P}(\langle X \rangle_\tau = 0) = 1 \implies \mathbb{P}(\langle X \rangle_{t \wedge \tau} = 0 \quad \forall t \geq 0) = 1,$$

da $\langle X \rangle$ monoton steigend ist.

2. Beobachtung:

$$0 \stackrel{OST}{=} \mathbb{E} \left(X_{t \wedge \tau}^2 - \langle X \rangle_{t \wedge \tau} \right) = \mathbb{E} X_{t \wedge \tau}^2 \quad \forall t.$$

Daraus folgt $X_{t \wedge \tau} = 0$ \mathbb{P} -f.s. für alle t . Daraus folgt die Behauptung unter Ausnutzung der Stetigkeit der Pfade. □

Bemerkung:

Die erste Aufgabe sagt aus, dass das Integral bzgl. $(X_t)_t \in \mathcal{M}_2^c$ in der Regel nicht als Lebesgue-Stieltjes-Integral definiert werden kann.

Ist $X \in \mathcal{M}_2^c$, so ist $\langle X \rangle$ monoton, sodass $V_t^{(1)}(\Pi) = \langle X \rangle_t$, wobei dies die Variation von $\langle X \rangle$ darstellt. Insbesondere gilt also im Allgemeinen $\mathbb{P}(\langle X \rangle_t > 0) = 1$. Insbesondere gilt für die Variation von $\langle X \rangle$ $V_t^{(2)}(\Pi) \rightarrow 0$ in Wahrscheinlichkeit. Also lässt sich $\int \dots d\langle X \rangle_t$ als Lebesgue-Stieltjes-Integral definieren.

Satz 1.5.13:

Seien $X, Y \in \mathcal{M}_2^c$. Dann existiert ein (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutiger, $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierter, stetiger Prozess $(A_t)_t$ von beschränkter Variation mit $A_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s. derart, dass $(X_t Y_t - A_t)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$ Martingal ist. Dies ist $A_t = \langle X, Y \rangle_t$.

Beweis:

Existenz: Zeige, dass $A_t := \langle X, Y \rangle_t$ der gesuchte Prozess ist.

Eindeutigkeit: Angenommen es existieren zwei Prozesse A, B mit den gewünschten Eigenschaften. Dann ist $M := (XY - A) - (XY - B) = B - A$ ein stetiges Martingal mit beschränkter Variation (da A, B beschränkte Variation haben).

Lokalisieren: Definiere $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$ und setze $M_t^{(n)} = M_{t \wedge \tau_n}$. Dies definiert ein stetiges, beschränktes Martingal, $M^{(n)} \in \mathcal{M}_2^c$. Aus der Eindeutigkeit der Doob-Meyer-Zerlegung folgt

$$\langle M \rangle_{t \wedge \tau_n} = \langle M^{(n)} \rangle_t = 0,$$

was nach Aufgabe 1.5.12. $\mathbb{P}(M_t^{(n)} = 0 \forall t \geq 0) = 1$ bedeutet. Also gilt auch $\mathbb{P}(M_t = 0 \forall t \geq 0) = 1$, da $\tau_n \uparrow \infty$ \mathbb{P} -f.s.. Also sind A und B ununterscheidbar. \square

Definition 1.5.14 (Lokales Martingal):

Sei $X = (X_t)_t$ ein (stetiger) stochastischer Prozess. Falls eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten τ_n mit

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ \mathbb{P} -f.s.
- $X_t^{(n)} := X_{t \wedge \tau_n}$ ist ein Martingal für jedes n

existiert, dann heißt X ein (stetiges) lokales Martingal. Gilt außerdem $X_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s., so schreiben wir $X \in \mathcal{M}^{loc}$ bzw. $X \in \mathcal{M}^{loc,c}$, falls X stetig.

Bemerkung 1.5.15:

- Jedes Martingal ist ein lokales Martingal.
- Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Es gibt stetige, gleichgradig integrierbare lokale Martingale, die keine Martingale sind.

Definition 1.5.16:

Seien $X, Y \in \mathcal{M}_2$. Definiere

$$\begin{aligned}\|X\|_t &:= \sqrt{\mathbb{E}(X_t^2)} \quad \forall t \geq 0 \\ \|X\| &:= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|X\|_n \wedge 1) \\ d(X, Y) &:= \|X - Y\|.\end{aligned}$$

Proposition 1.5.17 (Proposition 5.23):

(\mathcal{M}_2, d) und (\mathcal{M}_2^c, d) sind vollständige metrische Räume.

Beweis:

d ist eine Pseudometrik. Nun gilt $\|X - Y\| = 0 \Rightarrow \|X - Y\|_n = 0 \quad \forall n \Rightarrow X_n = Y_n$ \mathbb{P} -f.s. für alle n . Daraus folgt $X_t = \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_t) = Y_t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \leq n$. Wegen der Rechtsstetigkeit sind X, Y ununterscheidbar, d.h. d ist eine Metrik.

Vollständigkeit: Sei $(X^{(n)})_n$ eine Cauchy-Folge in \mathcal{M}_2 . Dann ist für jedes $t \geq 0$ $(X_t^{(n)})_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, denn für ein $k \geq t$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\left(X_t^{(n)} - X_t^{(m)} \right)^2 \right) &\leq \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\left(X_k^{(n)} - X_k^{(m)} \right)^2 \mid \mathcal{F}_t \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(X_k^{(n)} - X_k^{(m)} \right)^2 \right) \leq \|X^{(m)} - X^{(n)}\|_k.\end{aligned}$$

Also existiert ein $X_t \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ als Limes. Es bleibt zu zeigen, dass $(X_t)_t$ ein Martingal ist.

Dazu sei $A \in \mathcal{F}_s, s < t$ und zeige $\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_A \left(X_s^{(n)} - X_s^{(m)} \right) \right) \rightarrow 0$. □

2. Brownsche Bewegung

2.1. Einführung

Definition 2.1.1 (Brownsche Bewegung):

Eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung ist ein stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ bzw. $(B_t)_{t \in [0, T]}$ mit den Eigenschaften

- (Werte in \mathbb{R})
- $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert für eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_t$.
- Stetige Pfade
- $B_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s.
- $B_t - B_s$ sind unabhängig von \mathcal{F}_s für alle $t \geq s \geq 0$
- $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Bemerkung (Unabhängige und stationäre Zuwächse):

Sei $(B_t)_t$ eine Brownsche Bewegung und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$. Dann sind die Zuwächse $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})_j$ unabhängig und die Verteilung hängt nur vom Abstand $t_j - t_{j-1}$ ab (stationäre Zuwächse).

Bemerkung:

Die Brownsche Bewegung ist ein quadratintegrierbares Martingal mit $\langle B \rangle_t = t$.

Beweis:

$B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0, t) \implies B_t \in \mathcal{L}_2$ für alle t . Für die Martingaleigenschaft gilt

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s | \mathcal{F}_s) = B_s.$$

□

Bemerkung:

Gegeben sei ein stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ mit stationären, unabhängigen Zuwächsen, sodass $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Dann lässt sich zeigen, dass $(B_t)_t$ mit der induzierten Filtration $(\mathcal{F}_t^B)_t$ eine Brownsche Bewegung ist.

Für eine stochastische Differentialgleichung werden wir regelmäßig $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t$ für eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ nutzen. Ersatzweise $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$, sodass $B_t - B_s$ noch unabhängig von \mathcal{F}_s ist. Dann ist $(B_t)_t$ eine Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$.

2.2. Erste Konstruktion einer Brownschen Bewegung

Definition (Zylindermengen):

Definiere $\mathbb{R}^{[0,\infty)} := \{\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}\}$. Betrachte die Mengen der Form $\{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Diese heißen Zylindermengen in $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$. \mathcal{C} sei die Menge aller Zylindermengen in $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}) := \sigma(\mathcal{C})$.

Definition 2.2.1 (Verträglichkeitsbedingung für endlich-dimensionale Verteilungen):

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $t_1, \dots, t_n \geq 0$ sei ein W-Maß Q_{t_1, \dots, t_n} auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ gegeben. Die Familie dieser endlich-dimensionalen Maße

$$\{Q_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \geq 0\}$$

heißt verträglich, wenn

i) $Q_{t_1, \dots, t_n}(A_{t_1} \times \dots \times A_{t_n}) = Q_{s_1, \dots, s_n}(A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n})$ für alle Permutationen s_1, \dots, s_n von t_1, \dots, t_n und alle Wahlen von t_1, \dots, t_n und alle zulässigen Wahlen von A_1, \dots, A_n .

ii) $Q_{t_1, \dots, t_n}(A \times \mathbb{R}) = Q_{t_1, \dots, t_{n-1}}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Bemerkung:

Ist \mathbb{P} ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$, so definiert

$$Q_{t_1, \dots, t_n}(A) = \mathbb{P}(\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A) \quad (*)$$

eine verträgliche Familien von endlich-dimensionalen Maßen.

Satz 2.2.2 (Fortsetzungssatz von Kolmogorov):

Sei $\{Q_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \geq 0\}$ eine verträgliche Familie von endlich-dimensionalen Maßen. Dann existiert ein W-Maß \mathbb{P} auf $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ derart, dass (*) für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$ und alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Korollar 2.2.3:

Es existiert ein W-Maß \mathbb{P} auf $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ derart, dass $(B_t)_t$ definiert durch $B_t(\omega) := \omega(t)$ (kanonischer stochastischer Prozess) für alle $\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ und alle $t \geq 0$ stationäre, unabhängige Zuwächse hat mit $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ für $t \geq s \geq 0$.

Bemerkung:

Damit $(B_t)_t$ eine Brownsche Bewegung ist, fehlen noch stetige Pfade.

Beweis:

Sei $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\begin{aligned} F_{s_0, \dots, s_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \mathbb{P}(B_{s_1} \leq \alpha_1, \dots, B_{s_n} \leq \alpha_n) \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha_1} \dots \int_{-\infty}^{\alpha_n} p(s_1, 0, y_1) p(s_2 - s_1, y_1, y_2) \dots p(s_n - s_{n-1}, y_{n-1}, y_n) dy_n \dots dy_1 \end{aligned}$$

mit $p(t, u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t}(u - v)^2\right)$.

Lassen nun Permutationen der s_i zu. Verträglichkeitsbedingungen leicht zu verifizieren. \square

Erster Versuch: Gilt $\mathbb{P}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})) = 1$? Allerdings gilt, dass die stetigen Funktionen nicht messbar sind, d.h. es gilt $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)})$.

Satz 2.2.4 (Kolmogorov-Centsov-Stetigkeitssatz):

Sei $X = (X_t)_t$ ein stochastischer Prozess. Existieren Konstanten $\alpha, \beta, C > 0$ derart, dass

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^\alpha) \leq C |t - s|^{1+\beta}$$

für alle $s, t \in [0, T]$ gilt, dann existiert eine stetige Modifikation \tilde{X} von X , deren Pfade lokal Hölder-stetig sind mit Exponent $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. D.h. es existiert eine Zufallsvariable k mit $\mathbb{P}(k > 0) = 1$ und eine Konstante $\delta > 0$ mit

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t-s \leq k(\omega), s, t \in [0, T]} \frac{|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta \right) = 1.$$

Korollar 2.2.5:

Es existiert ein W -Maß \mathbb{P} auf $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$ und ein stochastischer Prozess $W = (W_t)_t$ auf $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$ derart, dass W mit Filtrierung $(\mathcal{F}_t^W)_t$ eine Brownsche Bewegung unter \mathbb{P} ist.

Beweis:

1. Schritt: Satz 2.2.4 ist anwendbar, denn

$$\mathbb{E}(|B_t - B_s|^{2n}) = (2n-1)!! |t-s|^n.$$

Wähle $\alpha = 4$, so gilt

$$\mathbb{E}(|B_t - B_s|^4) = 3 |t-s|^2.$$

Folglich existiert eine stetige Modifikation W^T von $(B_t)_{t \in [0, T]}$.

2. Schritt: Sei $\Omega_T = \{\omega : W_t^T(\omega) = B_t(\omega) \forall t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]\}$, so gilt $\mathbb{P}(\Omega_T) = 1$, da W^T eine Modifikation ist. Nun gilt für $\tilde{\Omega} = \bigcap_{T=1}^\infty \Omega_T$ ebenfalls $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$. Auf $\tilde{\Omega}$ gilt $W_t^{T_1} = B_t(\omega) = W_t^{T_2}(\omega)$ für alle $t \in \mathbb{Q} \cap [0, T_1] \cap [0, T_2]$. Wegen der Stetigkeit der Pfade gilt $W_t^{T_1}(\omega) = W_t^{T_2}(\omega)$ für alle $t \in [0, T_1 \wedge T_2]$. Also ist $(W_t(\omega))_t$ wohldefiniert durch $W_t(\omega) = W_t^T$ für $\omega \in \tilde{\Omega}$. Setze $W_t(\omega) := 0$ für alle t und alle $\omega \notin \tilde{\Omega}$. \square

Bemerkung:

Die Pfade der Brownschen Bewegung sind \mathbb{P} -f.s. γ -Hölder-stetig mit $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$. Statt $\alpha = 4, \beta = 1$ wähle $\alpha = 2n, \beta = n-1$, so ist $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n-1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also sind die Pfade Hölder-stetig mit $\gamma < \frac{1}{2}$.

2.3. Levy-Cielski-Konstruktion der Brownschen Bewegung

Fakten:

- H heißt (reeller) Hilbertraum, wenn H ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt ist, welcher vollständig bezüglich der induzierten Metrik ist.
- H heißt separabel, wenn es eine dichte abzählbare Teilmenge besitzt.
- $(h_n)_n$ heißt vollständige Orthonormalbasis, wenn $\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle i, j gilt und $\{\sum_{n=1}^N a_n h_n : N \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}\}$ dicht in H liegt.
- $L^2([0, 1], \lambda|_{[0,1]})$ mit $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg \, d\lambda$ ist ein separabler Hilbertraum.
- Ein separabler Hilbertraum besitzt eine vollständige Orthonormalbasis.
- Ist H ein separabler Hilbertraum und $(h_n)_n$ eine Folge in H mit $\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$. Dann ist $(h_n)_n$ eine vollständige Orthonormalbasis genau dann, wenn

$$\{x \in H : \langle x, h_n \rangle = 0 \, \forall n\} = \{0\}. \quad (*)$$

- Ist $(h_n)_n$ eine vollständige Orthonormalbasis so gilt die Parsevallsche Gleichung

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, h_n \rangle \langle y, h_n \rangle$$

für alle $x, y \in H$.

Definition (Haarbasis):

Definiere $f_0(t) \equiv 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$

$$f_{n,k}(t) := \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & t \in [(2k-2)2^{-n}, (2k-1)2^{-n}) \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & t \in [(2k-1)2^{-n}, 2k \cdot 2^{-n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Lemma:

$F := \{f_0\} \cup \{f_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}\}$ ist eine vollständige Orthonormalbasis von $L^2([0, 1], \lambda)$.

Beweis:

Normalität: Es gilt

$$\int_0^1 f_0^2(t) dt = 1 \text{ und } \int_0^1 f_{n,k}^2(t) dt = 2 \cdot 2^{-n} \cdot \left(2^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 = 1.$$

Orthogonalität:

$$\int_0^1 f_0(t) f_{n,k}(t) dt = \int_0^1 f_{n,k}(t) dt = 0.$$

Wegen $f_{n,k} \neq 0 \Rightarrow f_{n,l} = 0$ für $k \neq l$ gilt

$$\int_0^1 f_{n,k}(t)f_{n,l}(t)dt = 0.$$

Für $n \neq m$ gilt, da die Vorzeichen gegensätzlich sind

$$\int_0^1 f_{n,k}(t)f_{m,l}(t)dt = 0.$$

Für die Vollständigkeit verifiziere (*). Sei also h beliebig mit $\langle h, f_0 \rangle = 0$ und $\langle h, f_{n,k} \rangle = 0$ für alle n, k . Dazu zeigen wir, dass $\int_a^b h(t)dt = 0$ für alle $0 \leq a < b \leq 1$. Für $a = 0, b = 1$ gilt nach Voraussetzung

$$0 = \langle h, f_0 \rangle = \langle h, 1 \rangle = \int_0^1 h(t)dt.$$

Zeige nun nach Induktion über n , dass $\int_{(k-1)2^{-n}}^{k2^{-n}} h(t)dt = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, 2^n\}$. Für $n = 1$ gilt

$$0 = \langle h, f_{1,1} \rangle = \int_0^{1/2} h(t)dt - \int_{1/2}^1 h(t)dt \Rightarrow \int_0^{1/2} hdt = \int_{1/2}^1 hdt = 0$$

wegen $\int_0^1 hdt = 0$.

Für den Induktionsschritt gilt analog

$$\begin{aligned} 0 = \langle h, f_{n+1,k} \rangle &= 2^{\frac{n}{2}} \left(\int_{(2k-2)2^{-n-1}}^{(2k-1)2^{-n-1}} hdt - \int_{(2k-1)2^{-n-1}}^{2k \cdot 2^{-n-1}} hdt \right) \\ &\Rightarrow \int_{(2k-2)2^{-n-1}}^{(2k-1)2^{-n-1}} hdt = \int_{(2k-1)2^{-n-1}}^{2k \cdot 2^{-n-1}} hdt = 0 \end{aligned}$$

wobei im letzten Gleichheitszeichen die Induktionsvoraussetzung eingeht.

Seien nun $a, b \in [0, 1]$ beliebig. Dann gilt $\int_a^b hdt = 0$ für $a, b \in \{k2^{-n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n\}\}$, wobei dies dicht in $[0, 1]$ ist. Nach dem Satz von Lebesgue folgt daher $\int_a^b h(t)dt = 0$ für alle $a, b \in [0, 1]$. \square

Folgerung (Parsevallsche Gleichung):

Es gilt

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \langle h_1, f_0 \rangle \langle h_2, f_0 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \langle h_1, f_{n,k} \rangle \langle h_2, f_{n,k} \rangle$$

für alle $h_1, h_2 \in \mathcal{L}^2([0, 1])$.

Definiere nun die Schauder-Funktionen

$$\begin{aligned} F_0(t) &:= \int_0^t f_0(s)ds \\ F_{n,k}(t) &:= \int_0^t f_{n,k}(s)ds. \end{aligned}$$

Seien $\{\xi_0, \xi_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}\}$ eine Familie von unabhängigen Standard-Normalverteilten Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (Existenz ist gesichert, da aufgrund der Unabhängigkeit die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist).

Definition:

Definiere für festes $N \in \mathbb{N}$

$$B_t^{(N)}(\omega) = F_0(t)\xi_0(\omega) + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{2^{n-1}} F_{n,k}(t)\xi_{n,k}(\omega).$$

Beobachtung:

- i) Für N und ω fest ist $t \mapsto B_t^{(N)}(\omega)$ stetig mit $B_0^{(N)}(\omega) = 0$, d.h. $(B_t^{(N)})_t$ ist ein stetiger stochastischer Prozess.
- ii) Für $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq 1$ ist $(B_{t_1}^{(N)}, B_{t_2}^{(N)}, \dots, B_{t_k}^{(N)}) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Idee: $(B_t^{(N)})_t$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Brownsche Bewegung für $N \rightarrow \infty$.

Lemma:

Es gilt

$$\begin{aligned} & F_0(t)F_0(s) + \sum_{k=1}^N \sum_{k=1}^{2^{n-1}} F_{n,k}(t)F_{n,k}(s) \\ &= \langle \mathbb{1}_{[0,t]}, 1 \rangle \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, 1 \rangle + \sum_{k=1}^N \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \langle \mathbb{1}_{[0,t]}, f_{n,k} \rangle \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, f_{n,k} \rangle \\ & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]} \rangle = s \wedge t \end{aligned}$$

mit $h_1 = \mathbb{1}_{[0,t]}, h_2 = \mathbb{1}_{[0,s]}$.

Lemma:

$(B_t^{(N)}(\omega))_t$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 1]$ für \mathbb{P} -f.a. $\omega \in \Omega$. Genauer existiert ein $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ derart, dass für alle $\omega \in \Omega_0$ die Folge $(B_t^{(N)}(\omega))_t$ stetiger Funktionen gleichmäßig gegen eine Funktion $t \mapsto B_t(\omega)$ konvergiert. Insbesondere ist die Grenzfunktion $B_t(\omega)$ automatisch stetig.

Beweis:

Es gilt (beachte die Teleskopsumme)

$$D_t^{(N)}(\omega) := B_t^{(N)}(\omega) - B_t^{(N-1)}(\omega) = \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \underbrace{F_{N,k}(t)}_{\in [0, 2^{-\frac{N+1}{2}}]} \xi_{N,k}(\omega)$$

Damit gilt

$$\sup_t |D_t^{(N)}(\omega)| \leq 2^{-\frac{N+1}{2}} \underbrace{\max_{1 \leq k \leq 2^{N-1}} |\xi_{N,k}(\omega)|}_{=:\xi_N}$$

Daher folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_t |D_t^{(N)}| \geq x\right) &\leq \mathbb{P}\left(\xi_N \geq 2^{\frac{N+1}{2}} x\right) \leq \sum_k^{2^{N-1}} \mathbb{P}\left(|\xi_{N,k}| \geq 2^{\frac{N+1}{2}} x\right) \\ &= 2 \cdot 2^{N-1} \left(1 - \Phi\left(2^{\frac{N+1}{2}} x\right)\right) \leq 2^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Funktion bezeichnet und mit $x := \frac{N}{2} 2^{-N/2}$ gilt $y = \frac{N}{\sqrt{2}}$. Daher gilt

$$\mathbb{P}\left(\sup_t |D_t^{(N)}| \geq \frac{N}{2} 2^{-N/2}\right) \leq 2^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2}}{N} e^{-\frac{N^2}{4}}$$

was summierbar ist. Definiere

$$\Omega_0^c := \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \geq m} \left\{ \sup_t |D_t^{(N)}| \geq \frac{N}{2} 2^{-N/2} \right\},$$

so folgt nach dem Borel-Cantelli-Lemma $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Für $\omega \in \Omega_0$ gilt, dass ein $m(\omega)$ existiert, sodass für alle $N \geq m(\omega) : \sup_t |D_t^{(N)}| \leq \frac{N}{2} 2^{-N/2}$ gilt. Da die rechte Seite summierbar ist und $B_t^{(N)}(\omega)$ durch die $D_t^{(N)}(\omega)$ ausgedrückt werden kann, folgt die gleichmäßige Konvergenz. Insbesondere ist $B_t(\omega) := \lim_{N \rightarrow \infty} B_t^{(N)}(\omega)$ für $\omega \in \Omega_0$ wohldefiniert. \square

Ohne Einschränkung ersetze $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ durch $(\Omega_0, \mathcal{F}|_{\Omega_0}, \mathbb{P}|_{\mathcal{F}|_{\Omega_0}})$.

Satz 2.3.1 (Existenz einer stetigen Brownschen Bewegung):

$B = (B_t)_{t \in [0,1]}$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0, 1]$ bzgl. $(\mathcal{F}_t^B)_t$.

Beweis:

B_t ist reellwertig, $(\mathcal{F}_t^B)_t$ -adaptiert mit stetigen Pfaden und $B_0 = 0$ nach Konstruktion. Es bleibt also zu zeigen, dass $B_t - B_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s^B für alle $t > s \geq 0$ ist und $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Dazu zeige, dass für $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$ die Zuwächse $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_j$ unabhängig und $\mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1})$ verteilt sind. Dieses genügt, um die Unabhängigkeit von $B_t - B_s$ von \mathcal{F}_s^B zu zeigen, denn dazu müssten wir nur zeigen, dass $B_t - B_s$ unabhängig von $\{B_{s_1}, \dots, B_{s_m}\}$ für alle m und alle $s_1 \leq \dots, s_m \leq s$ ist. Wir zeigen

$$\mathbb{E} \exp\left(i \sum_{j=1}^m \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) = \prod_{j=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\right)$$

für alle $j = 1, \dots, m, \lambda_j \in \mathbb{R}$ gilt. Dazu nutze die Unabhängigkeit der $\xi_{n,k}$ in (*), so gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\exp \left(i \sum_{j=1}^m \lambda_j (B_{t_j}^{(N)} - B_{t_{j-1}}^{(N)}) \right) \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left(-i \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) B_{t_j}^{(N)} \right) \right) \\
& = \mathbb{E} \left(\exp \left(-i \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \xi_{n,k} \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) F_{n,k}(t_j) \right) \right) \\
& \stackrel{(*)}{=} \prod_{n=0}^N \prod_{k=1}^{2^{n-1}} \mathbb{E} \left(\exp \left(-i \xi_{n,k} \tilde{\lambda} \right) \right) = \prod_{n=0}^N \prod_{k=1}^{2^{n-1}} \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2 \right) \\
& = \dots = \prod_{i=1}^{m-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda_i^2 (t_j - t_{j-1}) \right).
\end{aligned}$$

Für die Details siehe [KS10]. □

Korollar 2.3.2 (Fortsetzung auf $[0, \infty)$):

Es existiert eine stetige Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t \in [0, \infty)}$.

Beweis:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert nach vorigem Satz ein $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ und eine Brownsche Bewegung $(X_t^{(n)})_{t \in [0, 1]}$ auf $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$. Definiere den Produktraum

$$\left(\Omega = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n, \mathcal{F} = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n, \mathbb{P} = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n \right).$$

Ferner definiere $B_t(\omega) = X_t^{(1)}(\omega_1)$ für $\omega \in \Omega$ und $t \in [0, 1]$ sowie $B_t(\omega) := B_n(\omega_n) + X_{t-n}^{(n+1)}(\omega_{n+1})$ für $\omega \in \Omega, t \in (n, n+1]$. Es lässt sich zeigen, dass $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathcal{F}_t^B)_t$ ist. □

2.4. Der Raum $\mathcal{C}([0, \infty))$, schwache Konvergenz und das Wiener-Maß

Der kanonische Raum, auf dem die Brownsche Bewegung betrachtet werden sollte, ist $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ mit der Metrik

$$\rho(\omega_1, \omega_2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sup_{t \in [0, k]} (|\omega_1(t) - \omega_2(t)|) \wedge 1.$$

Ziel: Konstruktion eines W-Maßes \mathbb{P} auf $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ mit der Borel- σ -Algebra derart, dass die Auswertungsabbildung $W_t(\omega) = \omega(t)$ unter diesem Maß eine Brownsche Bewegung darstellt.

Bemerkung:

$(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}), \rho)$ ist ein polnischer, d.h. ein vollständiger und separabler metrischer Raum.

Definition 2.4.1 (Zylindermengen):

Sei $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$ oder $[0, t]$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$\{\omega \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A\}$$

eine Zylindermenge von $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$. \mathcal{Z} sei die Menge aller Zylindermengen und \mathcal{Z}_t die Menge aller Zylindermengen mit $t_1, \dots, t_n \in [0, t]$ und definiere $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{Z})$, $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{Z}_t)$.

Aufgabe 2.4.2:

Es gilt $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$ und $\mathcal{G}_t = \varphi_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})))$, wobei $\varphi_t(\omega)(s) = \omega(t \wedge s)$.

Bemerkung:

Sei X ein stetiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann ist $X : \Omega \rightarrow \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$ -messbare Zufallsvariable. $\mathbb{P} X^{-1}$ heißt Verteilung von X . Verifiziere, dass für stetige stochastische Prozesse $\mathbb{P} X^{-1}$ eindeutig durch die endlichdimensionalen Verteilungen bestimmt ist.

Definition 2.4.3 (Straffheit):

Sei (S, ρ) ein metrischer Raum und Π eine Familie von W-Maßen auf $(S, \mathcal{B}(S))$.

- Π heißt relativ kompakt, wenn jede Folge in Π eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.
- Π heißt straff, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $K \subset S$ kompakt existiert mit $\mathbb{P}(K) \geq 1 - \varepsilon$ für alle $P \in \Pi$.
- Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_\alpha)_\alpha$ mit X_α definiert auf $(\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathbb{P}_\alpha)$ heißt relativ kompakt bzw. straff, wenn $\Pi = \{\mathbb{P}_\alpha X_\alpha^{-1}\}_\alpha$ die Eigenschaft hat.

Satz 2.4.4 (Satz von Prohorov):

Sei (S, ρ) ein polnischer Raum und Π eine Familie von W-Maßen auf $(S, \mathcal{B}(S))$. Dann ist Π relativ kompakt genau dann, wenn Π straff ist.

Beweis:

Ohne Beweis. □

Definition (Stetigkeitsmodul):

Sei $\omega \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$, $T > 0$ und $\delta > 0$. Definiere das Stetigkeitsmodul

$$m^T(\omega, \delta) = \sup_{|s-t| \leq \delta, s, t \in [0, T]} |\omega(s) - \omega(t)|.$$

Aufgabe 2.4.5:

Es gelten die Eigenschaften

- $\omega \mapsto m^T(\omega, \delta)$ ist stetig.
- $\delta \mapsto m^T(\omega, \delta)$ ist monoton wachsend.
- $\lim_{\delta \rightarrow 0} m^T(\omega, \delta) = 0$ für alle $\omega \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ (denn ω ist gleichmäßig stetig auf $[0, T]$).

Satz 2.4.6 (Straffheitskriterium für $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$):

Sei $(\mathbb{P}_n)_n$ eine Folge von W -Maßen auf $(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})))$. Dann ist $(\mathbb{P}_n)_n$ straff genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}_n(\omega : |\omega(0)| > \lambda) &= 0 \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}_n(\omega : m^T(\omega, \delta) > \varepsilon) &= 0 \quad \forall T, \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Beweis:

" \Rightarrow ": Sei $(\mathbb{P}_n)_n$ straff und $\eta > 0$ beliebig. Dann existiert wegen der Straffheit ein kompaktes K mit $\mathbb{P}_n(K) \geq 1 - \eta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Version des Satzes von Arzela-Ascoli sagt, dass $K \subset \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ genau dann kompakt ist (bzw. kompakten Abschluss besitzt), wenn

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in K} |\omega(0)| &< \infty \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\omega \in K} m^T(\omega, \delta) &= 0 \quad \forall T > 0 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_n \mathbb{P}_n(\underbrace{\omega : |\omega(0)| > \lambda}_{\subset K^c \text{ für } \lambda \text{ groß}}) \leq \sup_n \mathbb{P}_n(K^c) \leq \eta.$$

Da $\eta > 0$ beliebig war, ist die erste Bedingung nachgewiesen. Die zweite Bedingung lässt sich analog zeigen.

" \Leftarrow ": Wähle $T > 0, \lambda > 0$ und $\eta > 0$ mit $\sup_n \mathbb{P}_n(|\omega(0)| > \lambda) \leq \frac{\eta}{2^{T+1}}$. Außerdem existiert für $k \in \mathbb{N}$ ein $\delta_k > 0$ mit $\sup_n \mathbb{P}_n(m^T(\omega, \delta_k) > \frac{1}{k}) \leq \frac{\eta}{2^{T+k+1}}$. Definiere

$$\begin{aligned} A_T &:= \{|\omega(0)| \leq \lambda, m^T(\omega, \delta_k) \leq \frac{1}{k} \quad \forall k\} \\ A &:= \bigcap_{T=1}^{\infty} A_T. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\mathbb{P}_n(A_T) \geq 1 - \frac{\eta}{2^{T+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^{T+k+1}} = 1 - \frac{\eta}{2^T}$$
$$\mathbb{P}_n(A) \geq 1 - \sum_{T=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(A_T^c)}_{\leq \frac{\eta}{2^T}} \geq 1 - \eta,$$

woraus mit Arzela-Ascoli die Straffheit von $(\mathbb{P}_n)_n$ folgt. □

2.4.A. Konvergenz endlich dimensionaler Verteilungen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $X = (X_t)_t$ ein stetiger, stochastischer Prozess. Dann ist $X : \Omega \rightarrow \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$ -messbar.

Frage: Gegeben sei eine Folge $(X^n)_n$ stetiger, stochastischer Prozesse auf $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$. Konvergiert X^n in Verteilung gegen X , d.h. $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$? Konvergieren die endlich dimensionalen Randverteilungen?

Beobachtung:

Gilt $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, so gilt $(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und t_1, \dots, t_k .

Beweis:

Betrachte die Auswertungsabbildung

$$\begin{aligned} \Pi_{t_1, \dots, t_k} : \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ \omega &\mapsto (\omega(t_1), \dots, \omega(t_k)). \end{aligned}$$

Dies ist stetig, da es eine Projektion ist. Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n} f(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}) &= \int f(x_1, \dots, x_k) \mathbb{P}_n(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k})^{-1}(dx_1, \dots, dx_k) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n} f \circ \Pi_{t_1, \dots, t_k}(X^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} f \circ \Pi_{t_1, \dots, t_k}(X) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \end{aligned}$$

wobei hier eingeht, dass $f \circ \Pi_{t_1, \dots, t_k}$ eine stetige und beschränkte Funktion ist. □

Gilt auch die Umkehrung? Im Allgemeinen nicht.

Beispiel 2.4.7:

Definiere $X_t^n = nt \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2n}]}(t) + (1 - nt) \mathbb{1}_{(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]}(t)$ und $X_t = 0$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt:

- i) Die endlichdimensionalen Verteilungen konvergieren, denn für jedes $t > 0$ und $n > \frac{1}{t}$ gilt $X_t^n = 0 = X_t$ und damit

$$(X_0^n, X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) = 0 = (X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$$

für $n > \frac{1}{\min t_i}$.

- ii) Aber X^n konvergiert nicht in Verteilung gegen X , denn die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \sup_{0 \leq t \leq 1} |\omega(t)| \wedge 1 \end{aligned}$$

ist stetig und beschränkt, und es gilt $f(X^n) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = f(X)$.

Satz 2.4.8 (Konvergenz der endlichdim. Verteilungen & Straffheit \Rightarrow Kvgz. in Verteilung):
 Sei $(X^n)_n$ eine Folge von stetigen, stochastischen Prozessen, wobei $(X^n)_n$ straff sei als Folge $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ -wertiger Zufallsvariablen. Ferner konvergiere $(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k})_n$ in Verteilung für alle $k \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < \dots < t_k < \infty$. Definiere \mathbb{P}_n als die Verteilung von X^n und $W_t(\omega) = \omega(t)$.

Dann existiert ein W -Maß \mathbb{P} auf $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$, sodass $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{P}$ und $(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (W_{t_1}, \dots, W_{t_k})$ für alle k und t_i .

Beweis:

1. Schritt: Eindeutigkeitsaussage

Jede Teilfolge von $(X^n)_n$ ist straff, d.h. jede Teilfolge $(X^{n_k})_k$ hat eine konvergente Teilteilfolge $\mathbb{P}_{n_{k_l}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{P}$. Sei $(\mathbb{P}_{n_{\bar{k}_l}})_l$ eine weitere konvergente Teilfolge mit $\mathbb{P}_{n_{\bar{k}_l}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Q$. Dann gilt $\mathbb{P} = Q$, denn

$$\mathbb{P}(\omega : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{n_{k_l}}(\dots) = \lim_l \mathbb{P}_{n_{\bar{k}_l}}(\dots) = Q(\dots)$$

aufgrund der Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen. Also haben \mathbb{P} und Q die selben endlichdimensionalen Randverteilungen, d.h. aufgrund der Erzeugereigenschaft gilt $\mathbb{P} = Q$.

2. Schritt: Angenommen $(\mathbb{P}_n)_n$ konvergiert nicht oder nicht gegen \mathbb{P} . Dann existiert eine stetige, beschränkte Funktion $f : \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $(\int f d\mathbb{P}_n)_n$ nicht konvergiert oder nicht gegen $\int f d\mathbb{P}$. Es existiert wegen der Beschränktheit nach Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(\int f d\mathbb{P}_{n_k})_k$, die konvergiert. Unter der Annahme $\int f d\mathbb{P}_{n_k} \not\rightarrow \int f d\mathbb{P}$ erhalten wir einen Widerspruch zu Schritt 1, da $(\mathbb{P}_{n_k})_k$ eine Teilfolge haben muss mit $\mathbb{P}_{n_{k_l}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{P}$. \square

2.4.B. Das Invarianzprinzip und das Wiener-Maß

Seien $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. mit $\mathbb{E} \xi_1 = 0$, $\text{Var} \xi_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Definiere $S_0 := 0$, $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ (Irrfahrt). Definiere $Y = (Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ mittels linearer Interpolation via

$$Y_t = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor) \xi_{\lfloor t \rfloor + 1}$$

für $t \geq 0$, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die untere Gauß-Klammer sei und reskaliere via

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} Y_{nt}.$$

Beobachtung:

$X_{\frac{k+1}{n}}^{(n)} - X_{\frac{k}{n}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \xi_{k+1}$ ist unabhängig von $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_k) = \mathcal{F}_{k/n}^{X^n}$.

Satz 2.4.9 (Konvergenz der endlich-dimensionalen Verteilungen):

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ gilt

$$(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_k}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$$

mit einer Standard-Brownschen Bewegung $(B_t)_t$.

Beweis:

Sei ohne Einschränkung $k = 2$, $s = t_1$, $t = t_2$ ($s < t$).

1. Schritt: Beseitige die Interpolation:

$$\left| X_t^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} S_{\lfloor nt \rfloor} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} |\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}|.$$

Also gilt mit Tschebyscheff

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| X_t^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} S_{\lfloor nt \rfloor} \right| > \varepsilon \right) &\leq \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} |\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n\sigma^2 \varepsilon^2} \text{Var}(\xi_1) \\ &= \frac{1}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also geht die Differenz gegen 0 in Wahrscheinlichkeit. Analog gilt

$$\left\| \left(X_s^{(n)}, X_t^{(n)} \right) - \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} (S_{\lfloor ns \rfloor}, S_{\lfloor nt \rfloor}) \right\|_2 \rightarrow 0$$

in Wahrscheinlichkeit. Verwende nun: gilt $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $d(X^{(n)}, Y^{(n)}) \rightarrow 0$ in Wahrscheinlichkeit, so gilt $Y^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ (gilt auf separablen, metrischen Räumen).

Es genügt also zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} (S_{\lfloor ns \rfloor}, S_{\lfloor nt \rfloor}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (B_s, B_t). \quad (*)$$

2. Schritt: Verwende, dass falls $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ und φ stetig ist, so folgt auch $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(X)$ angewendet auf die Funktion $\varphi(x, y) := x + y$. Statt (*) zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \left(S_{[sn]}, S_{[tn]} - S_{[sn]} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (B_s, B_t - B_s).$$

Dazu seien u, v beliebig, so ist wegen der Unabhängigkeit

$$\mathbb{E} e^{iu \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{j=1}^{[sn]} \xi_j + iv \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} \xi_j} = \mathbb{E} e^{iu \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{j=1}^{[sn]} \xi_j} \cdot \mathbb{E} e^{iv \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} \xi_j}$$

Beachte:

$$\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{j=1}^{[sn]} \xi_j = \underbrace{\frac{\sqrt{[sn]}}{\sqrt{n}}}_{\rightarrow \sqrt{s}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{[sn]\sigma^2}} \sum_{j=1}^{[sn]} \xi_j}_{\rightarrow \mathcal{N}(0,1)}$$

woraus mit dem Satz von Slutsky die Konvergenz gegen $\mathcal{N}(0, s)$ in Verteilung folgt. Also konvergieren auch die charakteristischen Funktionen. Also konvergiert obige charakteristische Funktion gegen das Produkt $e^{-u^2 \frac{s}{2}} \cdot e^{-v^2 \frac{t-s}{2}}$, wobei dies die charakteristische Funktion von $(B_s, B_t - B_s)$ in (u, v) ist. \square

Fortsetzung: Konvergenz auf Prozessebene. Zeige noch die Straffheit.

Lemma 2.4.10:

Es gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq [n\delta]+1} |S_j| > \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Beweis:

Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{([n\delta] + 1)\sigma^2}} S_{[n\delta]+1} &\xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n\delta\sigma^2}} S_{[n\delta]+1} &\xrightarrow{\mathcal{D}} Z. \end{aligned}$$

Sei $\lambda > 0$ beliebig. Wähle eine Folge $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_b$ mit $\varphi_k \downarrow \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus (-\lambda, \lambda)}$. Dann gilt wegen dem Satz von der monotonen Konvergenz für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|S_{[n\delta]+1}| \geq \lambda \sqrt{n\delta\sigma^2} \right) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \varphi_k \left(\frac{1}{\sqrt{n\delta\sigma^2}} S_{[n\delta]+1} \right) \\ &= \mathbb{E} \varphi_k(Z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^3} \mathbb{E}|Z|^3. \end{aligned}$$

Sei $\tau := \min\{j \geq 1 : |S_j| > \varepsilon\sqrt{n\sigma^2}\}$. Wähle $\delta > 0$ derart, dass $\sqrt{2\delta} < \varepsilon$. Daraus folgt (beachte, dass in dem zweiten Summanden der Aufspaltung $\tau = [n\delta] + 1$ zu einem Widerspruch führt und daher vernachlässigt werden kann)

$$\begin{aligned}
(*) &:= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq [n\delta]+1} |S_j| > \varepsilon\sqrt{n\sigma^2}\right) = \mathbb{P}(\tau \leq [n\delta] + 1) \\
&= \mathbb{P}\left(\tau \leq [n\delta] + 1, |S_{[n\delta]+1}| \geq \sqrt{n\sigma^2}(\varepsilon - \sqrt{2\delta})\right) + \mathbb{P}\left(\tau \leq [n\delta] + 1, |S_{[n\delta]+1}| < \dots\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|S_{[n\delta]+1}| \geq \sqrt{n\sigma^2}(\varepsilon - \sqrt{2\delta})\right) + \sum_{j=1}^{[n\delta]} \mathbb{P}\left(S_{[n\delta]} < \sqrt{n\sigma^2}(\varepsilon - \sqrt{2\delta}) \mid \tau = j\right) \mathbb{P}(\tau = j).
\end{aligned}$$

Auf $\{\tau = j\}$ gilt mit Hilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$S_{[n\delta]+1} < \sqrt{n\sigma^2}(\varepsilon - \sqrt{2\delta}) \Rightarrow |S_j - S_{[n\delta]} + 1| > \varepsilon\sqrt{n\sigma^2} - \sqrt{n\sigma^2}(\varepsilon - \sqrt{2\delta}) = \sqrt{n\sigma^2}\sqrt{2\delta}.$$

Damit gilt (beachte, dass das zweite Ereignis unabhängig von $\{\tau = j\}$ ist)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|S_{[n\delta]+1}| < \sqrt{n\sigma^2}(\varepsilon - \sqrt{2\delta}) \mid \tau = j\right) &\leq \mathbb{P}\left(|S_j - S_{[n\delta]+1}| > \sqrt{n\sigma^2}\sqrt{2\delta} \mid \tau_j\right) \\
&\leq \frac{1}{2\delta n\sigma^2} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=j+1}^{[n\delta]+1} \xi_i\right|^2\right) = \frac{1}{2\delta n\sigma^2} \text{Var}(\dots) \\
&= \frac{1}{2\delta n\sigma^2} \sum_{i=j+1}^{[n\delta]+1} \sigma^2 \leq \frac{1}{2} \frac{[n\delta]}{\delta n} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich zusammen

$$\begin{aligned}
(*) &= \mathbb{P}(\tau \leq [n\delta] + 1) \leq \mathbb{P}\left(|S_{[n\delta]}| \geq \sqrt{n\sigma^2}(\varepsilon - \sqrt{2\delta})\right) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau \leq [n\delta] + 1) \\
\Rightarrow (*) &\leq 2 \mathbb{P}\left(|S_{[n\delta]+1}| \geq \sqrt{n\sigma^2}(\varepsilon - \sqrt{2\delta})\right).
\end{aligned}$$

Wähle nun $\lambda = \frac{\varepsilon - \sqrt{2\delta}}{\sqrt{\sigma}}$, so gilt

$$(*) \leq 2 \mathbb{P}\left(|S_{[n\delta]+1}| \geq \sqrt{n\sigma^2}\sqrt{\sigma}\lambda\right)$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} (*) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\delta} \mathbb{P}(\dots) \\
&\leq \frac{2}{\delta} \frac{1}{\lambda^3} \mathbb{E}|Z|^3 = \frac{2\sqrt{\delta}}{(\varepsilon - \sqrt{2\delta})^3} \mathbb{E}|Z|^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.4.11:

Es gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq [n\delta] + 1, 0 \leq k \leq [nT] + 1} |S_{j+k} - S_k| > \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0, T > 0$.

Beweis:

Ohne Einschränkung sei $0 < \delta \leq T$. Dann existiert genau ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{T}{m} < \delta \leq \frac{T}{m-1}$. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[nT] + 1}{[n\delta] + 1} = \frac{T}{\delta} < m$, sodass $[nT] + 1 < m([n\delta] + 1)$ für n groß genug. Sei dies so.

$$(*) := \mathbb{P} \left(\max_{j,k} |S_{j+k} - S_k| > \varepsilon > \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{j,k} (|S_{j+k} - S_k| > \varepsilon \sqrt{n\sigma^2}) \right).$$

Seien j, k so gewählt, dass $|S_{j+k} - S_k| > \varepsilon \sqrt{n\sigma^2}$. Dann existiert ein eindeutiges $p \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $p([n\delta] + 1) \leq k < ([n\delta] + 1)(p+1)$. Wo liegt $j+k$?

1. Fall: $([n\delta] + 1)p \leq k + j \leq ([n\delta] + 1)(p+1)$. Dann muss

$$|S_k - S_{([n\delta] + 1)p}| > \frac{1}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \quad (1a)$$

oder

$$|S_{k+j} - S_{([n\delta] + 1)p}| > \frac{1}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \quad (1b)$$

gelten (Andernfalls nutze die Dreiecksungleichung, um $|S_k - S_{k+j}| \leq \frac{2}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2}$, d.h. einen Widerspruch zu erhalten).

2. Fall: $([n\delta] + 1)(p+1) < k + j < ([n\delta] + 1)(p+2)$ (weil $j \leq [n\delta] + 1$). Hier muss

$$|S_k - S_{([n\delta] + 1)p}| > \frac{1}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \quad (2a)$$

oder

$$|S_{([n\delta] + 1)p} - S_{([n\delta] + 1)(p+1)}| > \frac{1}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \quad (2b)$$

oder

$$|S_{([n\delta] + 1)(p+1)} - S_{k+j}| > \frac{1}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \quad (2c)$$

gelten (ansonsten erhalte wie oben einen Widerspruch zur Voraussetzung).

Daher

$$\begin{aligned} (*) &\leq \sum_{p=0}^m \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq l \leq [n\delta] + 1} |S_{([n\delta] + 1)p+l} - S_{([n\delta] + 1)p}| > \frac{1}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \right) \\ &= \sum_{p=0}^m \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq l \leq [n\delta] + 1} |S_l| > \frac{1}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \right) \stackrel{\Delta}{\leq} \left(\frac{T}{\delta} + 2 \right) \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq l \leq [n\delta] + 1} |S_l| > \frac{1}{3} \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

woraus die Behauptung mit Lemma 2.4.10 folgt. In Δ geht ein, dass $m+1 \leq \frac{T}{\delta} + 2$ wegen $m-1 \leq \frac{T}{\delta}$. \square

Satz 2.4.12 (Donskers Invarianzprinzip):

Sei $(X_t^{(n)})_t$ die obige reskalierte Irrfahrt und \mathbb{P}_n die Verteilung von $X^{(n)}$ auf dem Zielraum $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{P}_*,$$

wobei $W_t(\omega) := \omega(t)$ eine Brownsche Bewegung auf $(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})), \mathbb{P}_*)$.

Beweis:

Zu zeigen ist, dass $(X^{(n)})_n$ straff ist. Verwende Satz 2.4.6 (Straffheitskriterium in $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$). Da $X_0^{(n)} = 0$ \mathbb{P} -f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, genügt es, die zweite Bedingung zu verifizieren, d.h. es ist zu zeigen, dass

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(X^{(n)})^{-1} \left(m^T(\omega, \delta) > \varepsilon \right) = 0$$

für alle $T > 0$ und $\varepsilon > 0$. Da endlich viele Termine beliebig klein gemacht werden können, lässt sich das Supremum durch \limsup ersetzen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^{(n)})^{-1} \left(m^T(\omega, \delta) > \varepsilon \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{|s-t| < \delta, 0 \leq s, t \leq T} |X_s^{(n)} - X_t^{(n)}| > \varepsilon \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{|s-t| \leq [n\delta]+1, 0 \leq s, t \leq [nT]+1} |Y_s - Y_t| > \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq [n\delta]+1, 0 \leq k \leq [nT]+1} |S_{k+j} - S_k| > \varepsilon \sqrt{n\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung mit Lemma 2.4.11. □

Definition 2.4.13:

Das Maß \mathbb{P}_* auf $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$, unter dem die Auswertungsabbildung eine Standard Brownsche Bewegung definiert, heißt Wiener Maß und

$$(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})), \mathbb{P}_*)$$

heißt der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum für die Brownsche Bewegung.

2.5. Markoff-Eigenschaft

Definition 2.5.1 (Mehrdimensionale Brownsche Bewegung):

Sei $d \in \mathbb{N}$, μ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $B = (B_t)_t$ sei stetig mit Werten in \mathbb{R}^d und $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert. Dann heißt B d -dimensionale Brownsche Bewegung mit Start-/Anfangsverteilung μ , wenn gilt

- $\mathbb{P}(B_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$ für alle $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,
- Für $0 \leq s < t$ ist $B_t - B_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s und $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)Id_d)$.

Falls $\mu = \delta_x$, so heißt B Brownsche Bewegung mit Start in x .

Frage: Konstruktion?

Sei X eine Zufallsvariable auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$, $X(\omega_0) = \omega_0$ und $B^{(i)}, i = 1, \dots, d$ eindimensionale Standard-Brownsche-Bewegung auf $(\Omega^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)}, \mathbb{P}^{(i)})$. Auf $\mathbb{R}^d \times \Omega^{(1)} \times \dots \times \Omega^{(d)}$ mit

Produkt- σ -Algebra und -Maß definiere $B_t(\omega) := X(\omega_0) + \begin{pmatrix} B_t^{(1)}(\omega_1) \\ \vdots \\ B_t^{(d)}(\omega_d) \end{pmatrix}$ für $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_d)$

sowie $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^B$.

Zweite Konstruktion

Seien $\mathbb{P}^{(i)}, i = 1, \dots, d$ Kopien des Wiener-Maßes auf $(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}), \mathcal{B}(\dots))$ und $\mathbb{P}^0 := \otimes_{i=1}^d \mathbb{P}^{(i)}$. Unter \mathbb{P}^0 definiert die Auswertungsabbildung $B_t(\omega) = \omega(t)$ eine Brownsche Bewegung mit Start in 0. Für $x \in \mathbb{R}^d$ sei $\mathbb{P}^x(F) := \mathbb{P}^0(F - x)$ für alle $F \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d))$ und $F - x := \{\omega \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d) : x + \omega(\cdot) \in F\}$. Unter \mathbb{P}^x definiert $B_t(\omega) := \omega(t)$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x .

Sei μ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ sei $\mathbb{P}^\mu(F) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}^x(F) \mu(dx)$ (Verwende, dass $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) - \mathcal{B}([0, 1])$ -messbar ist).

Proposition 2.5.2:

Unter \mathbb{P}^μ ist $B_t(\omega) := \omega(t)$ eine Brownsche Bewegung mit Startverteilung μ .

Beweis:

Übung. □

Definition 2.5.3 (Universelle Messbarkeit):

Sei (S, ρ) ein metrischer Raum, μ ein W-Maß auf $(S, \mathcal{B}(S))$ und $\overline{\mathcal{B}(S)}^\mu$ die Vervollständigung der Borel-Mengen $\mathcal{B}(S)$ unter μ . Dann heißt $\mathcal{U}(S) := \bigcap_{\mu \text{ W-Maß}} \overline{\mathcal{B}(S)}^\mu$ die universelle σ -Algebra und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt universell messbar, falls es $\mathcal{U}(S) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist.

Definition 2.5.4 (Brownsche Familie):

Eine d -dimensionale Brownsche Familie ist

- ein adaptierter, d -dimensionaler stochastischer Prozess $B = (B_t)_t$ auf einem messbaren Raum (Ω, \mathcal{F})
- zusammen mit einer Familie $\{\mathbb{P}^x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ von W-Maßen auf (Ω, \mathcal{F})

derart, dass

- i)* $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ ist universell messbar für jedes $F \in \mathcal{F}$,
- ii)* $\mathbb{P}^x(B_0 = x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$,
- iii)* Unter \mathbb{P}^x ist B eine d -dimensionale Brownsche Bewegung mit Start in x für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

2.5.A. Markoff-Prozesse und Markoffsche Familien

Aufgabe 2.5.5:

Sei B eine Brownsche Bewegung mit Startverteilung μ , $0 \leq s < t$. Gegeben B_s bzw. $B_s = y$, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $B_t \in \Gamma$?

Idee: $B_t = B_s + (B_t - B_s) = y + \underbrace{B_t - B_s}_{\sim \mathcal{N}(0, t-s)} \stackrel{D}{=} y + B_{t-s}$.

Rigoros für den allgemeinen Fall:

Seien X, Y \mathbb{R}^d -wertige Zufallsvariablen (z.B. $Y = B_s, X = B_t - B_s$), $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ -Algebra (z.B. $\mathcal{G} = \mathcal{F}_s = \sigma\{B_u : u \leq s\}$), X sei unabhängig von \mathcal{G} (z.B. $B_t - B_s$ ist unabhängig von \mathcal{F}_s) und $Y \in \mathcal{G}$. Dann gelten

- 1) $\mathbb{P}(X + Y \in \Gamma \mid \mathcal{G}) = \mathbb{P}(X + Y \in \Gamma \mid Y)$ \mathbb{P} -f.s.
- 2) $\mathbb{P}(X + Y \in \Gamma \mid Y = y) = \mathbb{P}(X + y \in \Gamma)$ für $\mathbb{P}Y^{-1}$ -f.a. y .

Einschub: (Bauer, W-Theorie, Kapitel 15)

Was ist $\mathbb{P}(\dots \mid Y = y)$ bzw. $\mathbb{E}(\dots \mid Y = y)$? Beachte, dass $\mathbb{E}(X \mid Y)$ $\sigma(Y)$ -messbar ist. Also gilt nach dem Faktorisierungslemma, dass ein messbares g existiert mit $\mathbb{E}(X \mid Y) = g \circ Y$.

Satz:

Sei X eine \mathbb{R} -wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine messbare Zufallsvariable. $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ sei messbar mit $\mathbb{E}(X \mid Y) = g \circ Y$. Dann gilt

- a) g ist $\mathbb{P}Y^{-1}$ -integrierbar und erfüllt

$$\int_{A'} g d\mathbb{P}Y^{-1} = \int_{\{Y \in A'\}} X d\mathbb{P} \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}'. \quad (*)$$

- b) $(*)$ bestimmt die Funktion g $\mathbb{P}Y^{-1}$ -f.s. eindeutig.
- c) Umkehrung: Sei $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $\mathbb{P}Y^{-1}$ -integrierbar und erfülle $(*)$. Dann ist $g \circ Y$ eine Version von $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Beweis:

Sei $A' \in \mathcal{A}'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{A'} g d\mathbb{P}Y^{-1} &= \int \mathbb{1}_{A'} g d\mathbb{P}Y^{-1} = \int (\mathbb{1}_{A'} \circ Y)(g \circ Y) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{Y \in A'\}} g \circ Y d\mathbb{P} = \int_{\{Y \in A'\}} X d\mathbb{P} \end{aligned}$$

aufgrund der Eigenschaften der bedingten Erwartung.

c): Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\{Y \in A'\}} g \circ Y d\mathbb{P} &= \int_{A'} g d\mathbb{P}Y^{-1} \stackrel{(*)}{=} \int_{\{Y \in A'\}} X d\mathbb{P} \\ \Rightarrow \int_C g \circ Y d\mathbb{P} &= \int_C X d\mathbb{P} \end{aligned}$$

für alle $C \in \sigma(Y)$. Da $g \circ Y \in \sigma(Y)$ folgt, dass $g \circ Y = \mathbb{E}(X \mid Y)$. □

Definition:

Sei $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $\mathbb{P}Y^{-1}$ integrierbar. $g(y)$ heißt der bedingte Erwartungswert von X gegeben $Y = y$ für alle $y \in Y$, d.h. $\mathbb{E}(X | Y = y) = g(y)$.

Beachte: Der Satz zeigt, dass aus $y \mapsto \mathbb{E}(X | Y = y)$ der bedingte Erwartungswert wiedergewonnen werden kann:

$$\mathbb{E}(X | Y)(\omega) = \mathbb{E}(X | Y = y) \Big|_{y=Y(\omega)} = \mathbb{E}(X | Y = \cdot) \circ Y(\omega).$$

Beweis von (1):

Zwischenschritt: Zeige, dass $\mathbb{P}((X, Y) \in D | \mathcal{G}) = \mathbb{P}((X, Y) \in D | Y)$.

1. Schritt: Sei $D = B \times C$. Dann gilt

$$\mathbb{P}((X, Y) \in D | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \in B\}} \mathbb{1}_{\{Y \in C\}} | \mathcal{G}) = \mathbb{1}_{\{Y \in C\}} \cdot \mathbb{P}(X \in B).$$

Aus einer analogen Rechnung für $\sigma(Y)$ statt \mathcal{G} folgt die Behauptung.

2. Schritt: $\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) : \mathbb{P}((X, Y) \in D | \mathcal{G}) = \mathbb{P}((X, Y) \in D | Y)\}$ ist ein Dynkin-System.

λ - Π -Satz: Sei P ein Π -System (d.h. $P \neq \emptyset, A, B \in P \Rightarrow A \cap B \in P$) und D sei ein Dynkin-System mit $P \subset D$. Dann gilt $\sigma(P) \subset D$.

Mit $P = \{B \times C : B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \sigma(P) \subset D = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Wähle $D := \{(x, y) : x + y \in \Gamma\}$, so folgt (1). \square

Definition 2.5.6 (Markoff-Prozess mit Startverteilung μ):

Sei $d \in \mathbb{N}$, μ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und $X = (X_t)_t$ $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^\mu)$. X heißt Markoff-Prozess (MP) mit Startverteilung μ , wenn

$$i) \mathbb{P}^\mu(X_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma) \text{ für alle } \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

$$ii) \text{ für } s, t \geq 0 \text{ und } \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ gilt}$$

$$\mathbb{P}^\mu(X_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^\mu(X_{t+s} \in \Gamma | X_s) \mathbb{P}^\mu - f.s.$$

Definition 2.5.7 (Markoffsche Familie):

Sei $d \in \mathbb{N}$. Ein $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierter Prozess $X = (X_t)_t$ auf (Ω, \mathcal{F}) und eine Familie von W-Maßen $\{\mathbb{P}^x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ heißt Markoffsche Familie, wenn

$$a) x \mapsto \mathbb{P}^x(F) \text{ universell messbar für alle } F \in \mathcal{F} \text{ ist,}$$

$$b) \mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d$$

$$c) \mathbb{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma | X_s) \mathbb{P}^x - f.s. \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d, s, t \geq 0, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

$$d) \mathbb{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma | X_s = y) = \mathbb{P}^y(X_t \in \Gamma) \text{ für } \mathbb{P}^x X_s^{-1} - f.a. y.$$

Satz 2.5.8:

Eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein Markoff-Prozess. Eine d-dimensionale Brownsche Familie ist eine Markoff-Familie.

2.5.B. Äquivalente Formulierungen der Markoff-Eigenschaft

Definition:

Definiere $(U_t f)(x) = \mathbb{E}^x f(X_t)$. Dies ist ein linearer Operator zwischen dem Raum der beschränkten, messbaren Funktionen und dem Raum der beschränkten, universell messbaren Funktionen.

Für $f = \mathbb{1}_\Gamma$ gilt $\mathbb{E}^x f(X_t) = (U_t f)(x) = \mathbb{P}^x(X_t \in \Gamma)$, $x \mapsto (U_t f)(x)$ ist daher gemäß obiger Definition universell messbar, falls $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ universell messbar ist. Für allgemeine Funktionen zeige dies per maßtheoretischer Induktion.

Proposition 2.5.9:

Die Eigenschaften (c) und (d) in Definition 2.5.7 sind äquivalent zu

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s) = (U_t \mathbb{1}_\Gamma)(X_s) \quad \mathbb{P}^x -f.s. \quad (e)$$

für alle $x, s, t \geq 0, \Gamma$ unter den Voraussetzungen, dass $(X_t)_t$ auf (Ω, \mathcal{F}) $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert ist, $\{\mathbb{P}^x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ eine Familie von W -Maßen ist und $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ universell messbar ist für alle $F \in \mathcal{F}$.

Beweis:

(c) & (d) \Rightarrow (e): Zeige dies zunächst unter der Annahme, dass $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1], \alpha(y) := (U_t \mathbb{1}_\Gamma)(y)$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) - \mathcal{B}([0, 1])$ -messbar ist (dies ist z.B. für die Brownsche Bewegung erfüllt). Dann impliziert (d), dass

$$\mathbb{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma \mid X_s = y) = (U_t \mathbb{1}_\Gamma)(y) = \alpha(y) \quad \mathbb{P}_{X_s}^x -f.s..$$

Also folgt mit dem Satz aus der letzten Vorlesung

$$\mathbb{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma \mid X_s) = \alpha(X_s) \quad \mathbb{P}^x -f.s.,$$

woraus mit (c) folgt

$$\mathbb{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s) = \alpha(X_s) \quad \mathbb{P}^x -f.s..$$

Nach einer Übungsaufgabe gilt nun, dass f genau dann universell messbar ist, wenn es für alle endlichen Maße μ eine Funktion g_μ existiert mit $\mu(\{g_\mu \neq f\}) = 0$. Also existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und alle $s, t \geq 0$ zu $\mu = \mathbb{P}_{X_s}^x$ eine Borel-messbare Funktion g_μ mit $\mu(\{U_t \mathbb{1}_\Gamma(y) \neq g_\mu(y)\}) = 0$. Insbesondere gilt also

$$(U_t \mathbb{1}_\Gamma)(y) = g(y) \quad \mathbb{P}_{X_s}^x -f.s. \Rightarrow (U_t \mathbb{1}_\Gamma)(X_s) = g_\mu(X_s) \quad \mathbb{P}^x -f.s.$$

(e) \Rightarrow (c)&(d): Seien $x \in \mathbb{R}^d, s, t \geq 0$ gegeben. Wie im vorherigen Teil gilt $(U_t \mathbb{1}_\Gamma)(y) = g(y)$ für $\mathbb{P}_{X_s}^x$ -f.a. $y \in \mathbb{R}^d$. Also gilt $(U_t \mathbb{1}_\Gamma)(X_s) = g(X_s) \quad \mathbb{P}^x -f.s.$, d.h. nach (e) gilt $\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s) = g(X_s) \quad \mathbb{P}^x -f.s.$. Nun hat $\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s)$ eine $\sigma(X_s)$ -messbare Version, d.h. es gilt $\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s) = g(X_s) = \mathbb{P}^x(X_{s+t} \in \Gamma \mid X_s) \quad \mathbb{P}^x -f.s.$

Abschließend folgt mit dem Satz aus der letzten Vorlesung

$$g(y) = (U_t \mathbb{1}_\Gamma)(y) = \mathbb{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma \mid X_s = y)$$

für $\mathbb{P}_{X_s}^x$ -f.a. y . □

Notation 2.5.10:

Schreibe $X_{s+}(\omega)$ für $t \mapsto X_{s+t}(\omega)$. X_{s+} ist eine messbare Abbildung von (Ω, \mathcal{F}) in den Raum der \mathbb{R}^d -wertigen Abbildungen auf $[0, \infty)$ versehen mit der σ -Algebra der Zylindermengen, $\sigma(\mathcal{Z})$.

Proposition 2.5.11:

Sei $(X_t)_t, \{\mathbb{P}^x\}_x$ eine Markoffsche Familie. Dann gilt

$$\mathbb{P}^x (X_{s+} \in F \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^x (X_{s+} \in F \mid X_s) \quad \mathbb{P}^x \text{-f.s.} \quad (c')$$

sowie

$$\mathbb{P}^x (X_{s+} \in F \mid X_s = y) = \mathbb{P}^y (X \in F) \quad \mathbb{P}_{X_s}^x \text{-f.s.} \quad (d')$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d, s \geq 0, F \in \sigma(\mathcal{Z})$.

Beweis:

Das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{F \in \sigma(\mathcal{Z}) \mid (c') \ \& \ (d') \text{ gelten}\}$$

ist ein Dynkin-System. Es genügt daher, die Eigenschaften (c') und (d') für Zylindermengen zu zeigen, d.h. F ist von der Form

$$F = \{\omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)} \mid \omega(t_0) \in \Gamma_0, \dots, \omega(t_n) \in \Gamma_n\}$$

mit $t_0 = < t_1 < \dots < t_n, \Gamma_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $n \geq 0$.

Wir weisen (c') induktiv nach, (d') erfolgt analog. Für $n = 0$ ist dies erfüllt, da wir eine Markoffsche Familie haben, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}^x (X_s \in \Gamma_0 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^x (X_s \in \Gamma_0 \mid X_s) \quad \mathbb{P}^x \text{-f.s.}$$

Für den Induktionsschritt kann man per maßtheoretischer Induktion zeigen, dass für jede beschränkte, messbare Funktion $\varphi : (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}^x (\varphi(X_s, \dots, X_{s+t_{n-1}}) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}^x (\varphi(X_s, \dots, X_{s+t_{n-1}}) \mid X_s) \quad \mathbb{P}^x \text{-f.s.}$$

Also gilt

$$\mathbb{P}^x (X_{s+t_i} \in \Gamma_i \ i \leq n \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}^x \left(\mathbb{1}_{\{X_i \in \Gamma_i, i \leq n-1\}} \mathbb{P}^x (X_{s+t_n} \in \Gamma_n \mid \mathcal{F}_{s+t_{n-1}}) \mid \mathcal{F}_s \right).$$

Nach dem Faktorisierungslemma existiert eine messbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ mit $\mathbb{P}^x (X_{s+t_n} \in \Gamma \mid X_{s+t_{n-1}}) = g(X_{s+t_{n-1}})$. Wähle also

$$\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) = \mathbb{1}_{\Gamma_0}(x_0) \cdot \mathbb{1}_{\Gamma_{n-1}}(x_{n-1}) \cdot g(x_{n-1}),$$

so gilt wegen der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x (X_{s+t_i} \in \Gamma_i \ i \leq n \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}^x (\varphi(X_s, \dots, X_{s+t_{n-1}}) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}^x (\varphi(X_s, \dots, X_{s+t_{n-1}}) \mid X_s) \quad \mathbb{P}^x \text{-f.s.} \end{aligned}$$

Verwendung der Argumente Rückwärts liefert die Behauptung für n . □

Definition (Shift-Operator):

Sei $(X_t)_t$ auf (Ω, \mathcal{F}) definiert. Dann heißt eine $\mathcal{F} - \mathcal{F}$ -messbare Abbildung $\theta_s : \Omega \rightarrow \Omega$, $s \geq 0$ Shift-Operator, falls für alle $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega$ gilt

$$X_{s+t}(\omega) = X_t(\theta_s(\omega)).$$

Bemerkung:

Shift-Operatoren existieren u.A. für $\left((\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)}, \sigma(\mathcal{Z}) \right)$ oder $\left(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{C}(\dots)) \right)$ via $\theta_s(\omega)(t) := \omega(s+t)$.

Wenn ein Shift-Operator existiert, so gilt $X_{s+}(\omega) = X_+(\theta_s(\omega))$, $\{X_{s+} \in F\} = \theta_s^{-1}(\{X_+ \in F\})$. Ferner gilt für alle $F \in \mathcal{F}_\infty^X$

$$\mathbb{P}^x(\theta_s^{-1}F \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^x(\theta_s^{-1}F \mid X_s) \quad (c'')$$

sowie

$$\mathbb{P}^x(\theta_s^{-1}F \mid X_s = y) = \mathbb{P}^y(F) \quad \mathbb{P}_{X_s}^x \text{-f.s.} \quad (d'')$$

Analog zum Beweis von Proposition 2.5.9 lässt sich zeigen, dass (c'') und (d'') äquivalent sind zu

$$\mathbb{P}^x(\theta_s^{-1}F \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^{X_s}(F). \quad (e'')$$

Satz 2.5.12:

Sei $(X_t)_t$ $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert auf (Ω, \mathcal{F}) , $\{\mathbb{P}^x\}_x$ eine Familie von W -Maßen auf (Ω, \mathcal{F}) und $(\theta_s)_s$ eine Familie von Shift-Operatoren. Dann ist $(X_t)_t, \{\mathbb{P}^x\}_x$ eine Markoffsche Familie genau dann, wenn (a) , (b) und (e'') gelten.

Definition 2.5.13 (Brownsche Familie mit Drift und Diffusion):

Sei $(B_t)_t, \{\mathbb{P}^x\}_x$ eine d -dimensionale Brownsche Familie, $\mu \in \mathbb{R}^d$ und σ eine nichtsinguläre $d \times d$ -Matrix. Setze $Y_t := \mu t + \sigma B_t$.

Dann heißt $(Y_t)_t$ mit (\mathcal{F}_t) auf (Ω, \mathcal{F}) und $\{\mathbb{P}^{\sigma^{-1}x}\}_x$ eine d -dimensionale Brownsche Familie mit Drift μ und Diffusionskoeffizient σ . Beachte, dass $Y_0 = \mu \cdot 0 + \sigma B_0 = \sigma(\sigma^{-1}x) = x$.

2.6. Starke Markoff-Prozesse und Markoffsche Familien

Definition 2.6.1 (Starker Markoff-Prozess):

Sei $d \in \mathbb{N}$, μ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und $X = (X_t)_t$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^\mu)$ mit Werten in \mathbb{R}^d progressiv messbar bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$.

Dann heißt X starker Markoff-Prozess mit Anfangsverteilung μ , wenn gilt

- (i) $\mathbb{P}^\mu(X_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$ für alle Γ
- (ii) $\mathbb{P}^\mu(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = \mathbb{P}^\mu(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid X_\tau)$ \mathbb{P}^μ -f.s. auf $\{\tau < \infty\}$ für alle $(\mathcal{F}_t)_t$ -Optionszeiten τ .

Definition 2.6.2 (Starke Markoffsche Familie):

Sei $d \in \mathbb{N}$, X progressiv messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ auf (Ω, \mathcal{F}) und $\{\mathbb{P}^x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ seien W-Maße auf (Ω, \mathcal{F}) . Dann heißt $(X, \{\mathbb{P}^x\}_x)$ starke Markoffsche Familie, falls gilt

- (a) $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ ist universell messbar für alle F ,
- (b) $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$ für alle x ,
- (c) $\mathbb{P}^x(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = \mathbb{P}^x(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid X_\tau)$ \mathbb{P}^x -f.s. auf $\{\tau < \infty\}$ für alle x, t, Γ und Optionszeiten τ ,
- (d) $\mathbb{P}^x(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid X_\tau = y) = \mathbb{P}^y(X_t \in \Gamma)$ für $\mathbb{P}^x_{X_\tau}$ -f.a. y .

Bemerkung 2.6.3:

- Ist τ eine $(\mathcal{F}_t)_t$ Optionszeit, so ist τ eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Stopppzeit.
- Ist $(X_t)_t$ progressiv messbar, so gilt $X_\tau \in \mathcal{F}_{\tau+}$.
- Falls τ sogar eine Stopppzeit ist, so gilt $X_\tau \in \mathcal{F}_\tau$ und \mathbb{P}^x -f.s. auf $\{\tau < \infty\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_\tau) &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{\tau+}) \mid \mathcal{F}_\tau) \\ &\stackrel{(c)}{=} \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid X_\tau) \mid \mathcal{F}_\tau) \\ &= \mathbb{P}^x(X_{\tau+t} \in \Gamma \mid X_\tau). \end{aligned}$$

- Wähle $\tau = s$, so folgt, dass jede starke Markoffsche Familie eine Markoffsche Familie ist. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

Proposition 2.6.4:

Sei $X, \{\mathbb{P}^x\}_x$ eine starke Markoffsche Familie. Dann gilt für alle Stopppzeiten τ sowie x und F

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau+} \in F \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = \mathbb{P}^x(X_{\tau+} \in F \mid X_\tau) \quad \mathbb{P}^x\text{-f.s. auf } \{\tau < \infty\} \quad (c')$$

und

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau+} \in F \mid X_\tau = y) = \mathbb{P}^y(X \in F) \quad \mathbb{P}^x_{X_\tau}\text{-f.a. } y. \quad (d')$$

Beweis:

Ist τ eine Optionszeit, so ist $\tau + u$ eine Stoppzeit für alle $u > 0$. Imitiere den Beweis von Satz 2.5.11. \square

Proposition 2.6.5:

Sei $X = (X_t)_t$ progressiv messbar bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ und $\{\mathbb{P}^x\}_x$ W-Maße mit (a) und (b) aus 2.6.1. Dann sind äquivalent:

1) $X, \{\mathbb{P}^x\}_x$ ist eine starke Markoffsche Familie.

2) Es gilt für alle $(\mathcal{F}_t)_t$ -Optionszeiten und alle x, Γ

$$\mathbb{P}^x (X_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = (U_t \mathbb{1}_\Gamma)(X_\tau) \quad \mathbb{P}^x \text{-f.s. auf } \{\tau < \infty\}. \quad (e)$$

3) Für alle $(\mathcal{F}_t)_t$ -Optionszeiten sowie alle $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ gilt

$$\mathbb{E}^x (f(X_{\tau+t}) \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = (U_t f)(X_\tau) \quad \mathbb{P}^x \text{-f.s. auf } \{\tau < \infty\}. \quad (e')$$

Beweis:

Die Äquivalenz von (c)&(d) zu (e) ist analog zu obigem Beweis.

(e) \Rightarrow (e') folgt per Approximation durch einfache Funktionen. \square

Bemerkung 2.6.6:

Sei $X, \{\mathbb{P}^x\}_x$ eine starke Markoffsche Familie, μ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Definiere

$$\mathbb{P}^\mu(F) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}^x(F) \mu(dx).$$

Dann ist X auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^\mu)$ ein starker Markoff-Prozess mit Anfangsverteilung μ .

Beweis:

Folgt. \square

Zufälliger Shift

Sei $(\theta_s)_{s \geq 0}$ eine Familie messbarer Abbildungen mit $X_{s+t}(\omega) = X_t(\theta_s(\omega))$. Definiere θ_σ durch $\theta_\sigma = \theta_s$ auf $\{\sigma = s\}$ für alle ω mit $\sigma(\omega) < \infty$. Also ist θ_σ eine Abbildung $\{\sigma < \infty\} \rightarrow \Omega$ mit $X_{\sigma(\omega)+t}(\omega) = X_t(\theta_{\sigma(\omega)}(\omega))$.

Damit ist (c') äquivalent zu

$$\mathbb{P}^x(\theta_\tau^{-1} F \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = \mathbb{P}^x(\theta_\tau^{-1} F \mid X_\tau) \quad \mathbb{P}^x \text{-f.s. auf } \{\tau < \infty\} \quad (c'')$$

und (d') ist äquivalent zu

$$\mathbb{P}^x(\theta_t^{-1} F \mid X_\tau = y) = \mathbb{P}^y(F) \quad \text{für } \mathbb{P}_{X_\tau}^x \text{-f.a.y.} \quad (d'')$$

Satz 2.6.7:

Die Bedingungen (c'') und (d'') sind äquivalent zu

$$\mathbb{P}^x(\theta_\tau^{-1} F \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = \mathbb{P}^{X_\tau}(F) \quad \mathbb{P}^x \text{-f.s. auf } \{\tau < \infty\}. \quad (e'')$$

Beweis:

Analog zu Aussagen für Markoffsche Familien. \square

2.6.A. Starke Markoff-Eigenschaft für die Brownsche Bewegung

Satz 2.6.8:

Eine d -dimensionale Brownsche Familie ist eine starke Markoffsche Familie.
Eine d -dimensionale Brownsche Bewegung ist ein starker Markoff-Prozess.

Bemerkung:

Der zweite Teil folgt mit Bemerkung 2.6.6 aus dem ersten Teil.

Definition 2.6.9 (Reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit):

Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in einem polnischen Raum (S, ρ) und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ -Algebra.

Eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit von X gegeben \mathcal{G} ist eine Abbildung $Q : \Omega \times \mathcal{B}(S) \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften

- (i) $Q(\omega, \cdot)$ ist ein W-Maß auf $(S, \mathcal{B}(S))$ für alle $\omega \in \Omega$,
- (ii) $\omega \mapsto Q(\omega, E)$ ist \mathcal{G} -messbar für alle $E \in \mathcal{B}(S)$,
- (iii) $\mathbb{P}(X \in E \mid \mathcal{G})(\omega) = Q(\omega, E)$ für \mathbb{P} -f.a. ω und alle $E \in \mathcal{B}(S)$.

Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen dieser Definition existiert eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit von X gegeben \mathcal{G} .

Bemerkung 2.6.10:

Sei Q eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit von X gegeben \mathcal{G} . Dann gilt $\mathbb{E}(\mathbb{1}_E \mid \mathcal{G})(\omega) = Q(\omega, E)$ für \mathbb{P} -f.a. ω . Also folgt für alle beschränkten und messbaren Funktionen f $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{G})(\omega) = \int f(x)Q(\omega, dx)$ \mathbb{P} -f.s.. Insbesondere gilt für alle $u \in \mathbb{R}^d$ auch

$$\mathbb{E}\left(e^{i\langle u, x \rangle} \mid \mathcal{G}\right)(\omega) = \int e^{i\langle u, x \rangle} Q(\omega, dx) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (*)$$

Für alle u existiert daher eine Nullmenge N_u , sodass $(*)$ auf N_u^c gilt. Wähle eine abzählbare dichte Teilmenge von \mathbb{R}^d , nutze die Stetigkeit von $e^{\langle u, \cdot \rangle}$, um eine Nullmenge N zu erhalten, sodass für alle $\omega \notin N$ $(*)$ gilt.

Wenn $u \mapsto \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, x \rangle} \mid \mathcal{G}\right)(\omega)$ die charakteristische Funktion eines W-Maßes \mathbb{P}^ω ist, so muss $\mathbb{P}^\omega = Q(\omega, \cdot)$ für \mathbb{P} -f.a. ω gelten. Insbesondere gilt

$$\mathbb{P}(X \in E \mid \mathcal{G})(\omega) = Q(\omega, E) = \mathbb{P}^\omega(E) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Sei $(B_t)_t$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x . Definiere $M_t := e^{i\langle u, B_t \rangle + \frac{t}{2}\|u\|^2}$ und $R_t := \Re(M_t)$ und $I_t := \Im(M_t)$.

Lemma 2.6.11:

$(R_t)_t$ und $(I_t)_t$ sind Martingale bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^x)$.

Beweis:

Sei $0 \leq s < t$, so gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x(M_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}^x \left(M_s e^{i\langle u, B_t - B_s \rangle} e^{\frac{t-s}{2} \|u\|^2} | \mathcal{F}_s \right) \\ &= M_s \mathbb{E}^x \left(e^{i\langle u, B_t - B_s \rangle} \cdot e^{\frac{t-s}{2} \|u\|^2} \right) \\ &= M_s e^{\frac{t-s}{2} \|u\|^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \|u\|^2 (t-s)} = M_s.\end{aligned}$$

□

Beweis von 2.6.8:

Sei zunächst die Optionszeit τ beschränkt. Der optimale Stoppsatz zeigt

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(e^{i\langle u, B_{\tau+t} \rangle + \frac{\tau+t}{2} \|u\|^2} | \mathcal{F}_{\tau+} \right) &= \mathbb{E} (M_{\tau+t} | \mathcal{F}_{\tau+}) \\ &= e^{i\langle u, B_\tau \rangle + \frac{\tau}{2} \|u\|^2},\end{aligned}$$

woraus mit vorigem Lemma folgt, dass gegeben $\mathcal{F}_{\tau+}$ $B_{\tau+t}$ normalverteilt ist mit $\mathcal{N}(B_\tau, t \cdot \text{Id})$. Dies zeigt (e), d.h.

$$\mathbb{P}^x (B_{\tau+t} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\tau+}) = (U_t \mathbb{1}_\Gamma)(B_\tau) = \mathbb{P}^y(B_t \in \Gamma), y = B_\tau.$$

2. Schritt: Falls τ nicht beschränkt ist, siehe Problem 6.9 in [KS10].

□

Satz 2.6.12:

Sei τ eine \mathbb{P} -f.s. endliche Optionszeit, $(B_t)_t$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung. Definiere $W_t := B_{\tau+t} - B_\tau$. Dann ist $(W_t)_t$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung, die unabhängig von $\mathcal{F}_{\tau+}$ ist.

Proposition 2.6.13:

Sei (X, \mathbb{P}^x) eine starke Markoffsche Familie, wobei X rechtsstetig sei, σ eine Optionszeit und τ eine $\mathcal{F}_{\sigma+}$ -messbare Zufallszeit mit $\tau \geq \sigma$. Dann gilt

$$\mathbb{E}^x (f(X_\tau) | \mathcal{F}_{\sigma+}) (\omega) = \left(U_{\tau(\omega) - \sigma(\omega)} f \right) (X_\sigma(\omega)) \quad (*)$$

für \mathbb{P}^x -f.a. ω mit $\{\tau(\omega) < \infty\}$, alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Beweis:

Diskretisiere $\tau - \sigma$: Für $n \geq 1$ sei

$$\tau_n := \begin{cases} \sigma + \frac{1}{2^n} (\lfloor 2^n (\tau - \sigma) \rfloor + 1) & \tau < \infty \\ \infty & \text{sonst} \end{cases},$$

so gilt $\tau_n = \sigma + k2^{-n}$ für $(k-1)2^{-n} \leq \tau - \sigma < k2^{-n}$ und $\tau_n \downarrow \tau$ auf $\{\tau < \infty\}$. Sei $k \geq 0$. Auf $\{\sigma < \infty\}$ gilt \mathbb{P}^x -f.s.

$$\mathbb{E}^x (f(X_{\sigma+k2^{-n}}) | \mathcal{F}_{\sigma+}) \stackrel{(e')}{=} (U_{k2^{-n}} f)(X_\sigma)$$

und somit

$$\mathbb{E}^x (f(X_{\tau_n}) | \mathcal{F}_{\sigma^+}) = (U_{\tau_n - \sigma} f)(X_\tau) \text{ auf } \{\tau < \infty\},$$

woraus mit dem Satz von Lebesgue unter Beachtung, dass $\tau_n \downarrow \tau$, der Rechtsstetigkeit von X und der Beschränktheit von f folgt

$$\mathbb{E}^x (f(X_{\tau_n}) | \mathcal{F}_{\sigma^+}) \longrightarrow \mathbb{E}^x (f(X_\tau) | \mathcal{F}_{\sigma^+})$$

sowie

$$(U_{\tau_n - \sigma} f)(X_\tau) \text{ auf } \{\tau < \infty\} \longrightarrow (U_{\tau - \sigma} f)(X_\sigma).$$

□

Korollar 2.6.14:

Seien die Voraussetzung wie in der vorherigen Proposition. Dann gilt (*) für jede beschränkte, messbare Funktion f . Insbesondere gilt für $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbb{P}^x (X_\tau \in \Gamma | \mathcal{F}_{\sigma^+}) = (U_{\tau - \sigma} \mathbb{1}_\Gamma)(X_\sigma) \text{ } \mathbb{P}^x \text{-f.s. auf } \{\tau < \infty\}. \quad (**)$$

Beweis:

1. Schritt: Approximiere $\mathbb{1}_\Gamma$ für abgeschlossene Mengen Γ durch stetige, beschränkte Funktionen (vgl. Beweis von 6.7 in [KS10]).
2. Schritt: beliebiges $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
3. Schritt: beliebige beschränkte, messbare Funktion. □

Definition 2.6.15:

Sei $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann heißt die Stoppzeit

$$\tau_b(\omega) = \inf\{t \geq 0 : B_t(\omega) = b\}$$

Erstdurchgangszeit. Dies ist die Erstaustrittszeit aus $(-\infty, b)$.

Proposition 2.6.16:

Sei B eine eindimensionale SBM auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$, $b \neq 0$ und τ_b die Erstdurchgangszeit. Dann hat τ_b die Dichte

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{2t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Beweis:

Ohne Einschränkung sei $b > 0$, sonst betrachte $-B$. Wende Korollar 6.18 mit $\sigma = \tau_b$ und $\tau = \begin{cases} t & \sigma < t \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$ sowie $\Gamma = (-\infty, b)$ an. Dann gilt $B_\sigma = b$ auf $\{\sigma < \infty\}$, also auch auf $\{\sigma < t\} = \{\tau < \infty\}$. Dort gilt außerdem

$$(U_{\tau - \sigma} \mathbb{1}_\Gamma)(B_\sigma) = (U_{\tau - \sigma} \mathbb{1}_\Gamma)(b) = \mathbb{P}^b(B_{\tau - \sigma} < b) = \frac{1}{2}.$$

Auf $\{\tau < \infty\}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^0(\tau_b < t, B_t < b) &= \mathbb{P}^0(\tau_b < t, B_\tau < b) \\ &= \int_{\tau_b < t} \underbrace{\mathbb{P}^0(B_\tau < b \mid \mathcal{F}_{\sigma+})}_{=\frac{1}{2}} d\mathbb{P}^0 \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}^0(\tau_b < t)\end{aligned}$$

weil $\{\tau_b < t\} \in \mathcal{F}_{\sigma+} = \mathcal{F}_{\tau_b+}$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^0(\tau_b < t) &= \mathbb{P}^0(\tau_b < t, B_t < b) + \mathbb{P}^0(\tau_b < t, B_t > b) + 0 \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}^0(\tau_b < t) + \mathbb{P}^0(B_t > b) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}^0(\tau_b < t) = 2 \mathbb{P}^0(B_t > b).\end{aligned}$$

Mit der selben Definition von τ_n aus Satz 6.17 erhalten wir $\tau_n \downarrow \tau$ auf $\{(k-1)2^{-n} \leq \tau - \sigma < k2^{-n}\}$ sowie $\tau_n = \sigma + k2^{-n}$.

Folglich gilt

$$\mathbb{P}^0(B_{\sigma+k2^{-n}} < b \mid \mathcal{F}_{\sigma+}) = \frac{1}{2} \quad \forall k, n$$

und nach Limesbildung für k und n gilt wegen $\tau_n \downarrow \tau$ gilt $\mathbb{P}^0(B_\tau < b \mid \mathcal{F}_{\sigma+}) = \frac{1}{2}$. \square

Bemerkung:

Es gilt $\mathbb{P}^0(\tau_b < t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{b}{\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-x^2/2) dx \rightarrow 1$ für $t \rightarrow \infty$, d.h. es gilt $\mathbb{P}^0(\tau_b < \infty) = 1$.

Satz 2.6.17 (Blumenthals 0-1-Gesetz):

Sei $(B_t)_t, \{\mathbb{P}^x\}_x$ eine d -dimensionale brownische Familie auf einem Messraum (Ω, \mathcal{F}) mit einer Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ (augmentiert und komplettiert). Dann gilt $\mathbb{P}^x(F) \in \{0, 1\}$ für alle $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Beweis:

Seien $x \in \mathbb{R}^d$ und $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0$ beliebig, so existiert ein $G \in \mathcal{F}_0^B$, sodass $\mathbb{P}^x(F \Delta G) = 0$. $G \in \mathcal{F}_0^B$ hat die Form $G = \{B_0 \in \Gamma\}, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Also gilt

$$\mathbb{P}^x(F) = \mathbb{P}^x(G) = \mathbb{P}^x(B_0 \in \Gamma) = \mathbb{1}_\Gamma(x) \in \{0, 1\}.$$

\square

Eine Folgerung davon ist das folgende Problem.

Aufgabe 2.6.18:

Zeigen Sie, dass eine eindimensionale SBM mit Wahrscheinlichkeit 1 in jedem Intervall $[0, \varepsilon]$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt.

2.7. Brownsche Filtrierungen

Das Ziel ist eine Vervollständigung und Augmentierung von σ -Algebren. Dazu sei $X = (X_t)_t$ ein stochastischer Prozess mit der induzierten Filtrierung $(\mathcal{F}_t^X)_t$ auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, \mathbb{P}^\mu)$, wobei μ ein W-Maß ist und $\mathbb{P}^\mu(X_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$ gilt.

Definition 2.7.1:

Setze $N_t^\mu := \{F \subset \Omega : \exists G \in \mathcal{F}_t^X \text{ mit } F \subset G, \mathbb{P}^\mu(G) = 0\}$ sowie $N^\mu := N_\infty^\mu$ (\mathbb{P}^μ -Nullmengen).

Definition 2.7.2:

Für $0 \leq t < \infty$ definiere

i) die Vervollständigung:

$$\overline{\mathcal{F}_t^\mu} = \sigma(\mathcal{F}_t^X \cup N_t^\mu).$$

ii) die Augmentierung:

$$\mathcal{F}_t^\mu = \sigma(\mathcal{F}_t^X \cup N^\mu)$$

bzw. für $t = \infty$

$$\mathcal{F}^\mu := \sigma(\mathcal{F}_\infty^X \cup N^\mu).$$

Aufgabe 2.7.3:

$(\Omega, \mathcal{G}^\mu, \mathbb{P}^\mu)$ ist vollständig. Das heißt ist $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\infty^X$ eine σ -Algebra und $\mathcal{G}^\mu := \sigma(\mathcal{G} \cup N^\mu)$, so definiere die Fortsetzung von \mathbb{P}^μ auf $\mathcal{G}^\mu := \{F \subset \Omega : \exists G \in \mathcal{G} \text{ mit } F \Delta G \in N^\mu\}$.

Dann ist $(\Omega, \mathcal{G}^\mu, \mathbb{P}^\mu)$ vollständig in dem Sinne, dass $\mathbb{P}^\mu(F) = 0$ für $F \in \mathcal{G}^\mu$ und $D \subset F$, so folgt auch $D \in \mathcal{G}^\mu$.

2.7.A. Rechtsstetigkeit der augmentierten Filtrierung

Proposition 2.7.4:

Sei X ein starker Markoff-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t^X)_t$ mit einer Anfangsverteilung μ . Dann ist $(\mathcal{F}_t^\mu)_t$ eine rechtsstetige Filtrierung.

Korollar 2.7.5:

Sei X ein linksstetiger starker Markoff-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t^X)_t$. Dann ist $(\mathcal{F}_t^\mu)_t$ stetig.

Bemerkung:

Beachte Problem 7.1 aus [\[KS10\]](#):

- $(\mathcal{F}_{t+}^X)_t$ ist rechtsstetig. Ist X linksstetig, so ist auch $(\mathcal{F}_t^X)_t$ linksstetig.
- Ist X stetig, so folgt im Allgemeinen weder, dass $(\mathcal{F}_t^X)_t$ rechtsstetig ist, noch, dass $(\mathcal{F}_{t+}^X)_t$ linksstetig ist.

Satz 2.7.6:

Sei B eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^B, \mathbb{P}^\mu)$ zu einer Anfangsverteilung μ . Dann ist B eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t^\mu)_t$.

Daher ist eine Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathcal{F}_t^\mu)_t$ ein starker Markoff-Prozess.
 Frage: Gegeben einen starken Markoff-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t^X)_t$ und $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, \mathbb{P}^\mu)$. Ist X auch ein starker Markoff-Prozess bezüglich $(\mathcal{F}_t^\mu)_t$? Ja, siehe dazu Aufgaben 7.11 - 7.13 in [KS10].

2.7.B. Universelle Filtrierung

Problem: $(\mathcal{F}_t^\mu)_t$ hängt vom Maß μ ab.

Sei $(X_t)_t, (\mathbb{P}^x)_x$ eine starke Markoffsche Familie bzgl. $(\mathcal{F}_t^X)_t$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X)$. Definiere $\mathbb{P}^\mu(F) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}^x(F) \mu(dx)$ und $\tilde{\mathcal{F}}_t := \bigcap_{\mu \text{ W-Ma\ss}} \mathcal{F}_t^\mu$ für alle $t \in [0, \infty]$.

Folgerung: Sei X stark Markoffsch bzgl. $(\mathcal{F}_t^X)_t$ und bzgl. $(\mathcal{F}_t^\mu)_t$, dann folgt wegen $\mathcal{F}_t^X \subset \bigcap_{\mu} \mathcal{F}_t^\mu \subset \tilde{\mathcal{F}}_t$ für alle $t \geq 0$ und W-Maße μ , dass X auch stark Markoffsch bzgl. $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ ist. Beachte, dass $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ rechtsstetig ist wegen

$$\tilde{\mathcal{F}}_{t^+} = \bigcap_{s \geq t} \bigcap_{\mu} \mathcal{F}_s^\mu = \bigcap_{\mu} \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s^\mu = \bigcap_{\mu} \mathcal{F}_t^\mu = \tilde{\mathcal{F}}_t.$$

Satz 2.7.7:

Sei $(B_t)_t, (\mathcal{F}_t^B)_t, (\Omega, \mathcal{F}_\infty^B), (\mathbb{P}^x)_x$ eine Brownsche Familie. Dann ist dies auch mit $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ und $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}_\infty)$ eine Brownsche Familie.

Bemerkung 2.7.8:

Für die Brownsche Bewegung ist $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ Borel-messbar für jedes $F \in \mathcal{F}_\infty^B$. Trotzdem ist $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ für $F \in \tilde{\mathcal{F}}_\infty$ nur universell messbar.

2.8. Berechnungen mittels Durchgangszeiten

2.8.A. Brownsche Bewegung und das running maximum

Sei eine eindimensionale Brownsche Familie $(W_t)_t, \{\mathbb{P}^x\}_x$ auf (Ω, \mathcal{F}) gegeben mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ und definiere $\tau_b := \inf\{t \geq 0 : W_t = b\}$. Sei $M_t := \max_{0 \leq s \leq t} W_s$ das running maximum.

Proposition 2.8.1 (Gemeinsame Dichte von W_t und M_t):

Sei $t > 0$, $a \leq b$ und $b \geq 0$. Dann hat (W_t, M_t) die Dichte

$$(a, b) \mapsto \begin{cases} \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}} & b \geq 0, a \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis:

Sei U_t der Übergangsoperator zu W . Dann gilt für $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} (U_{t-s} \mathbb{1}_{(-\infty, a]})(b) &= \mathbb{P}^b(W_{t-s} \leq a) = \mathbb{P}^b(W_{t-s} \geq 2b - a) \\ &= (U_{t-s} \mathbb{1}_{[2b-a, \infty)})(b), \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichheit die Symmetrie eingeht. Nach Korollar 6.18 gilt auf $\{\tau_b < t\}$ \mathbb{P}^0 -f.s.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0(W_t \leq a \mid \mathcal{F}_{\tau_b^+}) &= (U_{t-\tau_b} \mathbb{1}_{(-\infty, a]})(\underbrace{W_{\tau_b}}_{=b}) \\ &= (U_{t-\tau_b} \mathbb{1}_{[2b-a, \infty)})(b) = \mathbb{P}^0(W_t \geq 2b - a \mid \mathcal{F}_{\tau_b^+}) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0(W_t \leq a, \underbrace{M_t \geq b}_{=\tau_b \leq t}) &= \mathbb{P}^0(W_t \leq a, \tau_b < t) \\ &= \int_{\{\tau_b < t\}} \mathbb{P}^0(W_t \leq a \mid \mathcal{F}_{\tau_b^+}) d\mathbb{P}^0 \\ &= \int_{\{\tau_b < t\}} \mathbb{P}^0(W_t \geq 2b - a \mid \mathcal{F}_{\tau_b^+}) d\mathbb{P}^0 \\ &= \mathbb{P}^0(W_t \geq 2b - a, \tau_b < t) = \mathbb{P}^0(W_t \geq 2b - a, M_t \geq b) \\ &= \mathbb{P}^0(W_t \geq 2b - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2b-a}^{\infty} \exp\left(-x^2/(2t)\right) dx. \end{aligned}$$

Um nun die Dichte zu berechnen, differenziere die Verteilungsfunktion nach a und b und nutze

$$\mathbb{P}^0(W_t \leq a, M_t \leq b) = \mathbb{P}^0(W_t \leq a) - \mathbb{P}^0(W_t \leq a, M_t \geq b).$$

□

2.9. Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung

Definition 2.9.1 (Gauß-Prozess, Stationarität):

Sei $X = (X_t)_t$ ein \mathbb{R}^d -wertiger stochastischer Prozess. Dann heißt X gaußsch, wenn alle endlichdimensionalen Verteilungen Normalverteilungen sind, d.h. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ ist normalverteilt für alle Wahlen der t_i und k .

Ein Prozess X heißt stationär, wenn $(X_{t_1+t}, \dots, X_{t_k+t}) \sim (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ für alle k und Wahlen von t_i und $t \geq 0$.

Bemerkung:

Eine gaußsche Zufallsgröße Y ist eindeutig durch den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$ und die Kovarianzmatrix $Cov(Y) = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y)(Y - \mathbb{E}Y)^T)$ bestimmt.

Ein \mathbb{R}^d -wertiger Gaußprozess ist eindeutig bestimmt durch $m(t) = \mathbb{E}X_t$ und $S(s, t) := ((X_s - m(s))(X_t - m(t))), 0 \leq s \leq t < \infty$.

Definition:

Ist $m \equiv 0$, so heißt X zentriert.

Bemerkung 2.9.2:

Eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist ein zentrierter Gaußprozess mit Kovarianzfunktion $S(s, t) = s \wedge t$ für $s, t \geq 0$.

Ein Gaußprozess, der zentriert ist mit Kovarianzfunktionen $S(s, t) = s \wedge t$ für $s, t \geq 0$ mit stetigen Pfaden ist eine Brownsche Bewegung.

Aufgabe 2.9.3:

Für eine SBM $(W_t)_t$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0.$$

Lemma 2.9.4 (Transformation der BM):

Sei W eine SBM. Dann sind die folgenden Prozesse ebenfalls SBM:

i) Skalierung: $X_t := \frac{1}{\sqrt{c}} W_{ct}$ für alle $c > 0$.

ii) Zeitumkehr: Setze $Y_t := \begin{cases} t \cdot W_{\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t = 0. \end{cases}$

iii) Zeitumkehr: $Z_t := W_T - W_{T-t}$ für $0 \leq t \leq T$.

iv) Symmetrie: $(-W_t)_t$.

Aufgabe 2.9.5:

Sei W eine SBM. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\exists (s_n)_n, (t_n)_n \subset \mathbb{Q} : s_n, t_n \uparrow \infty, W_{s_n} > 0, W_{t_n} < 0, s_n < t_n < s_{n+1} \forall n) = 1.$$

Beweis:

Die Brownsche Bewegung kreuzt die x -Achse unendlich oft in jedem Intervall $(0, \varepsilon]$. Die Behauptung folgt mittels Zeitumkehr $t \rightarrow \frac{1}{t}$. \square

2.9.A. Die Nullstellenmenge der Brownschen Bewegung

Definiere $\mathcal{Z} := \{(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega : W_t(\omega) = 0\}$ sowie $\mathcal{Z}_\omega := \{t \in [0, \infty) : W_t(\omega) = 0\}$ für festes ω .

Satz 2.9.6:

Für \mathbb{P} -f.a. $\omega \in \Omega$ hat \mathcal{Z}_ω die folgenden Eigenschaften:

- i) \mathcal{Z}_ω ist eine Lebesgue-Nullmenge.
- ii) \mathcal{Z}_ω ist abgeschlossen und unbeschränkt.
- iii) \mathcal{Z}_ω hat einen Häufungspunkt in 0.
- iv) \mathcal{Z}_ω hat keine isolierten Punkte in $(0, \infty)$.
- v) \mathcal{Z}_ω ist dicht in sich selbst.

Beweis:

- i) $\mathcal{Z} \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$, weil W progressiv messbar ist. Also ist der Satz von Fubini anwendbar. Daher gilt

$$\lambda \otimes \mathbb{P}(\mathcal{Z}) = \mathbb{E} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{0\}}(W_t) \lambda(dt) = \mathbb{E}(\lambda(\mathcal{Z}_\cdot)).$$

Andererseits gilt

$$\lambda \otimes \mathbb{P}(\mathcal{Z}) = \int_0^\infty \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{0\}}(W_t) \right) \lambda(dt) = \int_0^\infty \mathbb{P}(W_t = 0) dt = 0.$$

Wegen $\mathbb{E} \lambda(\mathcal{Z}_\cdot) = 0$ und da $\lambda(\mathcal{Z}) \geq 0$ folgt $\lambda(\mathcal{Z}_\omega) = 0$ \mathbb{P} -f.s.

- ii) Halte $\omega \in \Omega$ fest und definiere $f_\omega(t) = W_t(\omega)$. Dann ist f_ω stetig für \mathbb{P} -f.a. ω . Nun ist $\mathcal{Z}_\omega = \{t \geq 0 : f_\omega(t) = 0\} = f_\omega^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. Problem 9.5 liefert, dass \mathcal{Z}_ω \mathbb{P} -f.s. unbeschränkt ist.
- iii) $t \mapsto W_t(\omega)$ hat in jedem Intervall $(0, \varepsilon]$ mindestens eine Nullstelle, d.h. 0 ist ein Häufungspunkt.
- iv) \mathcal{Z}_ω hat einen isolierten Punkt genau dann, wenn $\exists a < b \exists! s \in (a, b)$ mit $W_s(\omega) = 0$ und $W_u(\omega) \neq 0$ für $u \in (a, b) \setminus \{s\}$. Also gilt

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega : \mathcal{Z}_\omega \text{ hat einen isolierten Punkt in } (0, \infty)\} \\ = & \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}: 0 \leq a < b < \infty} \{\omega \in \Omega : \exists s \in (a, b) \text{ mit } W_s(\omega) = 0 \text{ und } W_u(\omega) \neq 0 \text{ für } u \in (a, b) \setminus \{s\}\} \end{aligned}$$

Definiere $\beta_t = \inf\{s > t : W_s = 0\}$ für $t \geq 0$ (Optionszeit). Dann gilt nach Aufgabe 9.5 $\mathbb{P}(\beta_t < \infty) = 1$ sowie $\mathbb{P}(\beta_0 = 0) = 1$, weil $t = 0$ ein Häufungspunkt ist. Definiere

$$\beta_{\beta_t} = \inf\{s > \beta_t : W_s = 0\} = \beta_t + \inf\{s > 0 : W_{\beta_t+s} = 0\}.$$

Dann ist $W_{\beta_t+s} = W_{\beta_t+s} - W_{\beta_t}$ f.s. und $(W_{\beta_t+s})_s$ ist eine SBM gemäß der starken Markoff-Eigenschaft. Also gilt $\inf\{s > 0 : W_{\beta_t+s} = 0\} = \beta_0(W_{\beta_t+s} - W_{\beta_t}) = 0$ f.s., sodass $\beta_{\beta_t} = \beta_t$ f.s. folgt. Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega : \mathcal{Z}_\omega \text{ hat einen isolierten Punkt}\} \\ = & \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}: 0 \leq a < b < \infty} \{\omega \in \Omega : \beta_a(\omega) < b, \beta_{\beta_a}(\omega) > b\}. \end{aligned}$$

Aber es gilt

$$\mathbb{P}(\beta_a < b, \beta_{\beta_a} > b) = \mathbb{P}(\beta_a < 0, \beta_a > b) = 0,$$

sodass die Behauptung folgt.

v) Klar, weil keine isolierten Punkte existieren. □

Bemerkung 2.9.7:

Die Niveaumengen $\mathcal{Z}_\omega(b) = \{t \geq 0 : W_t(\omega) = b\}$ für $b \in \mathbb{R}$ sind abgeschlossen, unbeschränkt, dicht in $\mathcal{Z}_\omega(b)$ und eine Lebesgue-Nullmenge für \mathbb{P} -f.a. ω .

Beweis:

Wende Theorem 9.6 an auf $\tilde{W}_t := W_{\tau_b+t} - W_{\tau_b}$ mit $\tau_b = \inf\{s : W_s = b\}$. Nach Satz 6.16 ist $(\tilde{W}_t)_t$ eine SBM. □

2.9.B. Pfade nirgends differenzierbar

Satz 2.9.8 (Paley, Wiener, Zygmund, 1933):

Es existiert eine Menge $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, derart dass $t \mapsto W_t(\omega)$ nirgends differenzierbar ist für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis:

Wähle ein $N > 0$ und zeige, dass die Pfade nirgends auf $[0, N]$ differenzierbar sind. Mit der Skalierungseigenschaft der BM sei OE $N = 1$.

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Es existiert mindestens ein $s \in [0, 1]$ derart, dass f in s differenzierbar ist, wenn der Limes $\lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ existiert. Insbesondere existiert ein

$\varepsilon > 0$ und ein $l \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{|f(t) - f(s)|}{t - s} \leq l$ für $s \leq t \leq s + \varepsilon$. Teile das Intervall $(s, s + \varepsilon]$:

Sei $m = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, $n \geq m$ und $i = \lfloor ns \rfloor + 1$. Dann gilt $s < \frac{i}{n} < \dots < \frac{i+3}{n} \leq s + \varepsilon$.

Für $j \in \{i+1, i+2, i+3\}$ gilt

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \right| & \leq \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(s) \right| + \left| f\left(\frac{j-1}{n}\right) - f(s) \right| \\ & \leq l \left(\frac{j}{n} - s \right) + l \left(s - \frac{j-1}{n} \right) \\ & \leq l \left(\frac{i+3}{n} - s + \frac{i+2}{n} - s \right) = l \left(2 \left(\frac{i}{n} - s \right) + \frac{s}{n} \right) \\ & \leq l \cdot \frac{7}{n}. \end{aligned}$$

Für $N := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left\{ \left| W_{j/n} - W_{(j-1)/n} \right| < \frac{7l}{n} \right\}$ (beachte, dass $N \in \mathcal{F}$) gilt $\mathbb{P}(N) = 0$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{P}(\bigcap_{n \geq m} \bigcup_i \bigcap_j \{ \dots \}) = 0$. Wir verwenden dabei, dass $(W_{j/n} - W_{(j-1)/n})_{j \in \{i+1, \dots, i+3\}}$ iid mit Verteilung $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ sind. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq m} \dots\right) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left\{ \left| W_{j/n} - W_{(j-1)/n} \right| < \frac{7l}{n} \right\}\right) \\ &\leq \liminf_n n \cdot \max_{i=1, \dots, n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i+1}^{i+3} \{ \dots \}\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \liminf_n n \left(\int_{-(7l)/n}^{(7l)/n} \frac{1}{\sqrt{2\pi 1/n}} e^{-x^2/(2 \cdot 1/n)} dx \right)^3 \\ &\leq \liminf_n n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{3/2} \left(\frac{14l}{n}\right)^3 = 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei in (*) eingeht, dass die Ereignisse unabhängig sind. \square

2.9.C. Gesetz des iterierten Logarithmus

Das Ziel ist eine Beschreibung der Oszillationen einer Brownschen Bewegung für die Fälle $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2.9.9:

Es gilt für alle $x > 0$

$$\frac{x}{1+x^2} e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

Erinnerung:

Für eine eindimensionale SBM W gilt das starke Gesetz der großen Zahlen, d.h. $\frac{W_t}{t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ \mathbb{P} -f.s., sowie $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = \infty$ \mathbb{P} -f.s.

Wir suchen eine Skalierungsfunktion $h(t)$ derart, dass $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{h(t)} \in (-\infty, 0)$ und $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{h(t)} \in (0, \infty)$.

Satz 2.9.10 (Gesetz des iterierten Logarithmus):

Für \mathbb{P} -f.a. $\omega \in \Omega$ gilt

- i) $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} = 1$,
- ii) $\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} = -1$,
- iii) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1$,
- iv) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1$.

Bemerkung:

Da W_t in Verteilung wie $-W_t$ ist, folgt $i) \Leftrightarrow ii)$ sowie $(iii) \Leftrightarrow (iv)$. Die Zeitumkehr zeigt $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

Beweis:

to be added.

□

3. Stochastische Integration

3.1. Konstruktion des stochastischen Integrals

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(\mathcal{F}_t)_t$ erfülle die üblichen Bedingungen. Sei $M \in \mathcal{M}_2^c$. Definiere das Maß μ_M auf $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$ durch

$$\mu_M(A) = \mathbb{E} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_A(t, \omega) d\langle M \rangle_t(\omega) \right).$$

Definition:

Sind X und Y adaptiert und messbar. Dann heißen X und Y äquivalent, wenn $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für μ_M -f.a. (t, ω) .

Definition:

Definiere für $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierte Prozesse X

$$[X]_T^2 := \mathbb{E} \left(\int_0^T X_t^2 d\langle M \rangle_t \right).$$

Bemerkung: • $[X]_T$ ist die $\mathcal{L}^2(\mu_M)$ -Norm von $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ auf $[0, T] \times \Omega$.

- Für die Brownsche Bewegung gilt

$$\mu_B(A) = \mathbb{E} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_A(t, \cdot) dt \right).$$

Daher gilt

$$[X]_T^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^T X_t^2 dt \right) = \int_0^T \mathbb{E}(X_t^2) dt$$

- Es gilt $[X - Y]_T = 0$ für alle $T > 0$ genau dann, wenn X und Y äquivalent sind.

Definition 3.1.1:

Sei \mathcal{L} die Menge aller Äquivalenzklassen von $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierten Prozessen X mit $[X]_T < \infty$ für alle $T \geq 0$. (Dies ist insbesondere erfüllt für alle beschränkten Prozesse X).

Definiere auf \mathcal{L} eine Metrik durch

$$[X - Y] := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} ([X - Y]_n \wedge 1).$$

Bemerkung:

\mathcal{L}^* seien alle progressiv messbaren Prozesse X mit $[X]_T < \infty$ für alle $T \geq 0$ (mit der selben Metrik). Notation: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$ und $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(M)$. Definiere für $T \geq 0$

$$\mathcal{L}_T^* := \{X \in \mathcal{L}^* : X_t(\omega) = 0 \forall t \geq T \forall \omega \in \Omega\}$$

und

$$\mathcal{L}_\infty^* := \{X \in \mathcal{L}^* : \mathbb{E} \int_0^\infty X_t^2 d\langle M \rangle_t < \infty\}.$$

Für $T \leq \infty$ betrachte \mathcal{L}_T^* als Teilraum von

$$\mathcal{H}_T := \mathcal{L}^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}, \mu_M).$$

Lemma 3.1.2:

Sei $T \leq \infty$. Dann ist \mathcal{L}_T^* ein abgeschlossener Teilraum von \mathcal{H}_T und \mathcal{L}_T^* mit $[\cdot]_T$ ist vollständig.

Beweis:

Sei $(X^n)_n$ eine Folge in \mathcal{L}_T^* mit $X^n \rightarrow X \in \mathcal{H}_T$. Dann existiert eine Teilfolge $(X^{n_k})_k$, die μ_M -f.s. konvergiert. $X \in \mathcal{H}_T$ impliziert $X_t \in \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ für alle t . Wir benötigen die progressive Messbarkeit.

Dazu sei

$$A := \{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega : \lim_{k \rightarrow \infty} X_t^{n_k}(\omega) \text{ existiert in } \mathbb{R}\}.$$

Definiere

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} X_t^{n_k} & (t, \omega) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann folgt wegen $X^{n_k} \in \mathcal{L}_T^*$ die progressive Messbarkeit, d.h. insbesondere ist Y progressiv messbar. Nun sind aber X und Y äquivalent. \square

3.2. Einfache Prozesse und Approximation

Definition 3.2.1 (Einfacher Prozess):

Ein Prozess X heißt einfach, falls eine Darstellung

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (\Delta)$$

existiert mit $t_n \uparrow \infty$, $\xi_n \in \mathcal{F}_{t_n}$ und es existiert ein $c > 0$ mit $|\xi_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Notation: Bei gegebener Filtrierung sei \mathcal{L}_0 die Menge aller einfachen Prozesse.

Bemerkung:

Alle $X \in \mathcal{L}_0$ sind beschränkt (durch c) und progressiv messbar, d.h. $X \in \mathcal{L}^*(M)$. Also gilt $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}^*(M) \subset \mathcal{L}(M)$.

Definition (Stochastischer Integral für einfache Integranden):

Sei $X \in \mathcal{L}_0$ mit der Darstellung (Δ) . Definiere für alle $0 \leq t < \infty$

$$I_t(X) := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n (M_t - M_{t_n}) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i})$$

mit n definiert durch $t_n \leq t < t_{n+1}$.

Bemerkung:

Es gelten die Eigenschaften

- $X_t(\omega) \equiv 1 \Rightarrow I_t(X) = M_t$.
- $X_t(\omega) = \mathbb{1}_{(1,2]}(t)$, so gilt

$$I_t(X) = 0 \cdot (M_{t \wedge 1} - M_{t \wedge 0}) + 1 \cdot (M_{t \wedge 2} - M_{t \wedge 1}) = M_{t \wedge 2} - M_{t \wedge 1}.$$

- Ist $M_t = B_t$ für alle t und $(X_t)_t$ ein deterministischer Prozess, so ist $I_t(X)$ für alle t normalverteilt.
- Gilt $X_t(\omega) = \xi(\omega)$ für alle t , so ist $I_t(X) = \xi \cdot M_t$.

Lemma 3.2.2 (Approximation durch einfache Prozesse):

Sei X ein beschränkter, messbarer, $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierter Prozess. Dann existiert eine Folge von einfachen Prozessen $(X^n)_n$ mit

$$\sup_{T>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |X_t^n - X_t|^2 dt = 0.$$

Beweis:

0. Schritt: Es genügt zu zeigen, dass für alle $T > 0$ eine Folge $(X^{n,T})_n \subset \mathcal{L}_0$ existiert mit

$$\lim_n \mathbb{E} \left(\int_0^T |X_t^{n,T} - X_t|^2 dt \right) = 0. \quad (\square)$$

Wenn dies gezeigt ist, wähle eine Folge n_m mit

$$\mathbb{E} \left(\int_0^m |X_t^{n_m, m} - X_t|^2 dt \right) \leq \frac{1}{m}$$

und definiere $X_t^{n_m, m} =: X_t^m$.

1. Schritt: Sei X stetig.

Dann definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$X_t^n(\omega) = X_0(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{k \frac{T}{2^n}}(\omega) \mathbb{1}_{[k \frac{T}{2^n}, (k+1) \frac{T}{2^n)}(t)$$

Dann gilt $X_t^{(n)} \rightarrow X_t$ punktweise und weil der Prozess beschränkt ist, folgt die Behauptung aus dem Satz von Lebesgue.

2. Schritt: Sei X progressiv messbar.

Approximiere den Prozess mit Hilfe stetiger, progressiv messbarer Prozesse. Dafür sei $F_t(\omega) := \int_0^{t \wedge T} X_s(\omega) ds$ (stetig, progressiv messbar) und für $m \geq 1$

$$\tilde{X}_t^m(\omega) := m \cdot \left(F_t(\omega) - F_{(t - \frac{1}{m}) \vee 0}(\omega) \right).$$

Dies ist der Differenzenquotient, welcher stetig und progressiv messbar ist.

Gemäß Schritt 1 existiert für alle m eine Folge $(\tilde{X}^{m, n})_n \subset \mathcal{L}_0$ mit

$$\lim_n \mathbb{E} \left(\int_0^T |\tilde{X}_t^{m, n} - \tilde{X}_t^m|^2 dt \right) = 0.$$

Definiere

$$A := \{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega : \lim_n \tilde{X}_t^{m, n}(\omega) = X_t(\omega)\}^c \in \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Analysis gilt für festes $\omega \in \Omega$ $\lambda(A_\omega) = 0$ für $A_\omega = \{t \in [0, T] : (t, \omega) \in A\}$. Nach dem Satz von Lebesgue folgt $\lim_m \mathbb{E} \int_0^T |\tilde{X}_t^m - X_t|^2 dt = 0$.

Zusammen ergibt sich also $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |\tilde{X}_t^{m, m_n} - X_t|^2 dt = 0$.

3. Schritt: Sei X messbar und adaptiert.

Es genügt zu zeigen, dass $(F_t)_t$ progressiv messbar ist. Nach Proposition 1.1.12 in [KS10] folgt aus Messbarkeit und Adaptiertheit die Existenz einer progressiv messbaren Modifikation Y . Mit Hilfe von Y definiere

$$G_t := \int_0^{t \wedge T} Y_s ds.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $(G_t)_t$ eine Modifikation von $(F_t)_t$ ist. Definiere $\eta_t = \mathbb{1}_{\{X_t \neq Y_t\}}$. Dies ist ein messbarer Prozess mit

$$\mathbb{E} \int_0^T \underbrace{\eta_t}_{\geq 0} dt = \int_0^T \underbrace{\mathbb{P}(X_t \neq Y_t)}_{=0 \ \forall t} dt = 0,$$

da X eine Modifikation von Y ist. Also folgt $\int_0^T \eta_t dt = 0$ \mathbb{P} -f.s. Wegen

$$\{F_t \neq G_t\} \subset \{\omega \in \Omega : \int_0^T \eta_t(\omega) dt > 0\}$$

folgt, dass G eine Modifikation von F ist. Da \mathcal{F}_t alle \mathbb{P} -Nullmengen enthält, muss $F_t \in \mathcal{F}_t$ sein. Also ist F_t adaptiert und stetig und damit progressiv messbar und die Behauptung folgt aus Schritt 2. \square

Proposition 3.2.3:

Sei $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ absolutstetig (bzgl. λ) für \mathbb{P} -f.a. $\omega \in \Omega$. Dann ist \mathcal{L}_0 dicht in \mathcal{L} bezüglich der Metrik $[X - Y]$.

Beweis:

a): Sei $X \in \mathcal{L}$ beschränkt. Mit Lemma 3.2.2 existiert eine Folge $(X^n)_n \subset \mathcal{L}_0$ mit

$$\sup_{T>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |X_t^n - X_t|^2 dt = 0. \quad (*)$$

Also existiert eine Teilfolge $(X^{n_k})_k$ mit

$$(\lambda \otimes \mathbb{P}) \left(\{(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega : \lim_k X_t^{n_k}(\omega) = X_t(\omega)\}^c \right) = 0.$$

Daraus folgt mit Lebesgue $[X^{n_k} - X] \rightarrow 0$, da

$$[X^{n_k} - X]_T^2 = \mathbb{E} \int_0^T \underbrace{|X_t^{n_k} - X_t|^2}_{\text{beschränkt}} d \langle M \rangle_t,$$

wobei $d \langle M \rangle_t = f(t, \omega) dt$ wegen der absoluten Stetigkeit.

b): Sei $X \in \mathcal{L}$ beliebig. Dann ist $X_t^n = X_t \mathbb{1}_{\{|X_t| \leq n\}}$ beschränkt. Nun ist

$$[X^n - X]_T^2 = \mathbb{E} \int_0^T X_t^2 \mathbb{1}_{\{|X_t| \geq n\}} d \langle M \rangle_t \longrightarrow 0$$

wegen dem Satz von Lebesgue, wobei die Majorante X_t^2 ist.

X^n kann gemäß a) durch einfache Prozesse approximiert werden. \square

Lemma 3.2.4:

Sei $(A_t)_t$ stetig und aufsteigend (d.h. $A_0 = 0, A_t \uparrow$, rechtsstetig, adaptiert, $\mathbb{E} A_t < \infty \forall t$) und X sei progressiv messbar mit $\mathbb{E} \int_0^T X_t^2 dA_t < \infty$ für alle $T > 0$.

Dann existiert eine Folge einfacher Prozesse $(X^n)_n$ mit

$$\sup_{T>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |X_t^n - X_t|^2 dA_t = 0.$$

Beweis:

Sei $X \in \mathcal{L}^*$ beliebig und ohne Einschränkung sei X beschränkt, d.h. $|X_t(\omega)| \leq C < \infty$ für alle (t, ω) . Andernfalls imitiere den zweiten Teil des Beweises der vorherigen Proposition. Wie im Beweis zu Lemma 3.2.2 genügt es zu zeigen, dass eine Folge von einfachen Prozessen $(X^n)_n$ existiert, sodass für festes $T > 0$ gilt

$$\lim_n \mathbb{E} \int_0^T |X_t^n - X_t|^2 dA_t = 0.$$

Sei also $T > 0$ fest. Setze $X_t(\omega) = 0$ für alle $t > T$ und alle $\omega \in \Omega$. Die Abbildung $t \mapsto A_t(\omega) + t$ ist streng monoton wachsend, d.h. es existiert eine Umkehrabbildung $s \mapsto T_s(\omega)$ mit $A_{T_s(\omega)} + T_s(\omega) = s$ für alle $s \geq 0$ und $\omega \in \Omega$. Beachte, dass $T_s \leq s$. Ferner gilt

$$\{T_s \leq t\} = \{A_t + t \geq s\} \in \mathcal{F}_t.$$

Für festes s ist also T_s eine beschränkte Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$. Neuer Prozess nach Zeitwechsel:

$$Y_s(\omega) := X_{T_s(\omega)}(\omega) \quad \forall s \geq 0 \text{ und } \omega \in \Omega$$

mit der Filtration $\mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{T_s}$. Dann ist Y adaptiert an $(\mathcal{G}_s)_s$, da $(X_s)_s$ progressiv messbar ist. Aus Lemma 3.2.2 folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$ und alle $R > 0$ ein einfacher Prozess $(Y_s^\varepsilon)_s$ ($(\mathcal{G}_s)_s$ -adaptiert) existiert, sodass

$$\mathbb{E} \int_0^R |Y_s^\varepsilon - Y_s|^2 ds < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Beachte dabei, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^\infty Y_s^2 ds &= \mathbb{E} \int_0^\infty \underbrace{X_{T_s}^2}_{=0 \text{ für } T_s > T} ds = \mathbb{E} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{T_s < T\}} X_{T_s}^2 ds \\ &= \mathbb{E} \int_0^{A_T+T} \underbrace{X_{T_s}^2}_{\leq C^2} ds \leq C^2 (\mathbb{E} A_T + T) < \infty. \end{aligned}$$

Also existiert ein $R > 0$ mit $\int_R^\infty Y_t^2 ds \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $Y_s^\varepsilon = 0$ für $s > R$, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^\infty |Y_s^\varepsilon - Y_s|^2 ds &= \mathbb{E} \int_0^R |Y_s^\varepsilon - Y_s|^2 ds + \mathbb{E} \int_R^\infty |Y_s^\varepsilon - Y_s|^2 ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Für den einfachen Prozess $(Y_s^\varepsilon)_s$ mit $Y_s^\varepsilon = 0$ für $s > R$ existiert eine Partition $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n \leq R$ mit

$$Y_s^\varepsilon = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{j=1}^n \xi_{s_{j-1}} \mathbb{1}_{(s_{j-1}, s_j]}(s)$$

mit $\xi_{s_{j-1}} \in \mathcal{G}_{s_{j-1}}$ sowie ein $K > 0$ mit $|\xi_{s_{j-1}}| \leq K$. Umschreiben auf die ursprüngliche Zeit liefert

$$X_t^\varepsilon := Y_{t+A_t}^\varepsilon = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^n \xi_{s_{j-1}} \mathbb{1}_{(T_{s_{j-1}}, T_{s_j}]}(t).$$

$(X_t^\varepsilon)_t$ ist messbar und $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert, weil

$$\underbrace{\xi_{s_j}}_{\in \mathcal{G}_{s_j} = \mathcal{F}_{T_{s_j}}} \underbrace{\mathbb{1}_{\{T_{s_j} < t\}}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t.$$

Ferner approximiert X^ε X wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T |X_t^\varepsilon - X_t|^2 dA_t &\leq \mathbb{E} \int_0^T |X_t^\varepsilon - X_t|^2 (dA_t + dt) \\ &= \mathbb{E} \int_0^\infty |Y_s^\varepsilon - Y_s|^2 ds < \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun ist allerdings X^ε kein einfacher Prozess. Es bleibt zu zeigen, dass X^ε sich durch einfache Prozesse approximieren lässt. Dazu zeige, dass

$$\eta_t(\omega) = \xi_{s_{j-1}} \mathbb{1}_{(T_{s_{j-1}}(\omega), T_{s_j}(\omega))}(t)$$

sich durch einfache Prozesse approximieren lässt. Ohne Einschränkung sei $s_{j-1} = 1, s_j = 2$, d.h. $\eta_t(\omega) = \xi_1(\omega) \mathbb{1}_{(T_1(\omega), T_2(\omega))}(t)$. Es ist $T_1 \leq T_2 \leq 2$. Definiere für $i = 1, 2$

$$T_i^m(\omega) := \sum_{k=1}^{2^{m+1}+1} \frac{k}{2^m} \mathbb{1}_{[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m})}(T_i(\omega))$$

sowie

$$\eta_t^m(\omega) := \xi_1(\omega) \mathbb{1}_{(T_1^m(\omega), T_2^m(\omega))}(t).$$

η^m ist einfach und η^m approximiert η , denn wegen $|\xi_1| \leq K$ und monotoner Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^\infty |\eta_t^m - \eta_t|^2 dA_t &\leq K^2 \mathbb{E} \int_0^\infty \left| \mathbb{1}_{(T_1^m, T_2^m)}(t) - \mathbb{1}_{(T_1, T_2)}(t) \right|^2 dA_t \\ &\leq K^2 \mathbb{E} \left((A_{T_2^m} - A_{T_2}) + (A_{T_1^m} - A_{T_1}) \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.5:

\mathcal{L}_0 ist dicht in \mathcal{L}^* bzgl. $[\cdot - \cdot]$.

Beweis:

Wende Lemma 3.2.4 an mit $A_t = \langle M \rangle_t$.

□

3.3. Konstruktion und einfache Eigenschaften des stoch. Integrals

Lemma:

Seien $X, Y \in \mathcal{L}_0(M)$, $0 \leq s < t < \infty$. Dann gelten

- 1) $I_0(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(M_{0 \wedge t_{i-1}} - M_{0 \wedge t_i}) = 0$ \mathbb{P} -f.s.
- 2) $\mathbb{E}(I_t(X) | \mathcal{F}_s) = I_s(X)$ \mathbb{P} -f.s.
- 3) $t \mapsto I_t(X)$ ist ein stetiges Martingal.
- 4) Es gilt die Itô-Isometrie

$$\mathbb{E}(I_t(X)^2) = \mathbb{E} \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u.$$

- 5) $I(X) \in \mathcal{M}_2^c$ mit $\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$.
- 6) Auf \mathcal{M}_2^c definiere

$$\|X\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(1 \wedge \sqrt{\mathbb{E} X_n^2}\right).$$

Dann gilt $\|I(X)\| = [X]$.

- 7) $\mathbb{E}\left((I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u | \mathcal{F}_s\right)$.
- 8) $I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Beweis:

to be added. □

Proposition 3.3.1:

Sei $X \in \mathcal{L}^*$. Dann existiert eine Folge $(X^n)_n \subset \mathcal{L}_0$ mit $[X^n - X] \rightarrow 0$.

Mit Hilfe dieser Proposition und den elementaren Eigenschaften des stochastischen Integrals lässt sich zeigen, dass

$$\|I(X^n) - I(X^m)\| = \|I(X^n - X^m)\| = [X^n - X^m] \rightarrow 0$$

für $n, m \rightarrow \infty$. Also ist $(I(X^n))_n$ eine Cauchy-Folge in \mathcal{M}_2^c , welcher ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{M}_2 ist, welcher vollständig ist. Also konvergiert $(I(X^n))_n$ gegen ein $I(X) \in \mathcal{M}_2^c$.

Definition 3.3.2 (Stochastisches Integral):

Sei $X \in \mathcal{L}^*$. Das stochastische Integral von X bezüglich eines Martingals $M \in \mathcal{M}_2^c$ ist das eindeutige, quadratisch integrierbare Martingal $I(X)$ mit $\lim_n \|I(X^n) - I(X)\| = 0$ für jede Folge von einfachen Prozessen $(X^n)_n$ mit $[X^n - X] \rightarrow 0$. Man schreibt

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dM_s$$

für alle $t \geq 0$.

Lemma:

$I(X)$ ist wohldefiniert.

Beweis:

1. Behauptung: Sei $(X^n)_n$ eine Folge in \mathcal{L}_0 mit $[X^n - X] \rightarrow 0$, dann existiert ein $I \in \mathcal{M}_2^c$ mit $\|I(X^n) - I\|_{\mathcal{M}_2^c} \rightarrow 0$, denn $(X^n)_n$ ist eine Cauchy-Folge in \mathcal{L}_0 mit Metrik $[X - Y]$. Also gilt wegen der Linearität für einfache Prozesse

$$\|I(X^n) - I(X^m)\|_{\mathcal{M}_2^c} = \|I(X^n - X^m)\|_{\mathcal{M}_2^c} = [X^n - X^m] \rightarrow 0$$

für $n, m \rightarrow \infty$ wegen Eigenschaft 6. Also ist $(I(X^n))_n$ eine Cauchyfolge und da \mathcal{M}_2^c ein abgeschlossener Teilraum des vollständigen Raumes \mathcal{M}_2 ist, ist $I \in \mathcal{M}_2^c$ wie gefordert.

2. Behauptung: I ist eindeutig. Denn seien $(X^n)_n, (Y^n)_n$ Folgen in \mathcal{L}_0 mit $[X^n - X] \rightarrow 0, [Y^n - X] \rightarrow 0$, so definiere $(Z^n)_n$ via $Z^{2n-1} = X^n, Z^{2n} = Y^n$. Dann gilt $[Z^n - X] \rightarrow 0$ und zu $(Z^n)_n$ existiert ein $I \in \mathcal{M}_2^c$ mit $\|I(Z^n) - I\|_{\mathcal{M}_2^c} \rightarrow 0$. Also gilt dies auch für die Teilfolgen. \square

Lemma 3.3.3 (Eigenschaften von $\int_0^t X_s dM_s$):

Sei $X \in \mathcal{L}^*$ und $M \in \mathcal{M}_2^c$. Dann gelten

- 1) $I_0(X) = 0$ \mathbb{P} -f.s.
- 2) $\mathbb{E}(I_t(X) \mid \mathcal{F}_s) = I_s(X)$ \mathbb{P} -f.s. für alle $0 \leq s < t < \infty$.
- 3) $\mathbb{E}((I_t(X))^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u\right)$
- 4) $\|I(X)\|_{\mathcal{M}_2^c} = [X]$.
- 5) $\mathbb{E}((I_t(X) - I_s(X))^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right)$ \mathbb{P} -f.s.
- 6) *Linearität:* $I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y)$.
- 7) $\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$.

Beweis:

3) – 5): Sei $A \in \mathcal{F}_s$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A (I_t(X) - I_s(X))^2 d\mathbb{P} &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A \left(\left(\mathcal{L}^2 - \lim_n I_t(X^n)\right) - \left(\mathcal{L}^2 - \lim_n I_s(X^n)\right)\right)^2\right) \\ &= \lim_n \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A (I_t(X^n) - I_s(X^n))^2\right) \\ &= \lim_n \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A \int_s^t (X_u^n)^2 d\langle M \rangle_u\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \cdot \mathbb{1}_A\right). \end{aligned}$$

Damit ist 5) gezeigt. Bilde den Erwartungswert, um 3) und 4) zu erhalten.
7): Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(I_t^2 - I_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left((I_t - I_s)^2 + 2I_t I_s - I_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right) \\ &\stackrel{6)}{=} \mathbb{E}\left(\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right) + \underbrace{2I_s \mathbb{E}(I_t \mid \mathcal{F}_s) - 2I_s^2}_{=0} \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right) - \int_0^s X_u^2 d\langle M \rangle_u\end{aligned}$$

wobei $\int_0^s X_u^2 d\langle M \rangle_u$ \mathcal{F}_s -messbar ist, weil X und M progressiv messbar sind. \square

Proposition 3.3.4:

Seien $X, Y \in \mathcal{L}^*$, $M \in \mathcal{M}_2^c$, $\sigma \leq \tau$ Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$. Dann gelten \mathbb{P} -f.s.:

- a) $\mathbb{E}(I_{t \wedge \tau}(X) \mid \mathcal{F}_\sigma) = I_{t \wedge \sigma}(X)$
- b) $\mathbb{E}((I_{t \wedge \tau}(X) - I_{t \wedge \sigma}(X)) \cdot (I_{t \wedge \tau}(Y) - I_{t \wedge \sigma}(Y)) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{E}\left(\int_{t \wedge \sigma}^{t \wedge \tau} X_u Y_u d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_\sigma\right)$
- c) $\mathbb{E}((I_t(X) - I_s(X)) \cdot (I_t(Y) - I_s(Y)) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\int_s^t X_u Y_u d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right)$
- d) $I_{t \wedge \tau}(X) = I_t(\tilde{X})$ mit $\tilde{X}_t(\omega) := X_t(\omega) \mathbb{1}_{\{t \leq \tau(\omega)\}}$.

Beweis:

a): Optionaler Stoppsatz.

b): Optionaler Stoppsatz angewendet auf $(I_t(Z)^2 - \int_0^t Z_u^2 d\langle M \rangle_u)_t$ zeigt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((I_{t \wedge \tau}(Z) - I_{t \wedge \sigma}(Z))^2 \mid \mathcal{F}_\sigma\right) &= \mathbb{E}\left(I_{t \wedge \tau}(Z)^2 - I_{t \wedge \sigma}(Z)^2 \mid \mathcal{F}_\sigma\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{t \wedge \sigma}^{t \wedge \tau} Z_u^2 d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_\sigma\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\end{aligned}$$

Setze $Z = X + Y$ bzw. $Z = X - Y$, so folgt die Behauptung.

c): Wähle $\tau \equiv t, \sigma \equiv s$ und nutze Teil b).

d): Zunächst gilt

$$I_{t \wedge \tau}(X) - I_t(\tilde{X}) = I_{t \wedge \tau}(X - \tilde{X}) - \underbrace{(I_t(\tilde{X}) - I_{t \wedge \tau}(\tilde{X}))}_{\text{Martingal in } \mathcal{M}_2^c}$$

Zeige, dass $\langle Z \rangle_\tau = 0$ \mathbb{P} -f.s. gilt. Ist dies gezeigt, so nutze Problem 1.5.12 in [KS10]: Aus $\langle Z \rangle_\tau = 0$ \mathbb{P} -f.s. folgt $\mathbb{P}(Z_{\tau \wedge t} = 0 \forall t \geq 0) = 1$.

Für $t \mapsto I_{t \wedge \tau}(X - \tilde{X})$ gilt folgendes: Für $Z = X - \tilde{X}, s < t$ gilt

$$\mathbb{E}\left((I_{t \wedge \tau}(Z) - I_{s \wedge \tau}(Z))^2 \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_{s \wedge \tau}^{t \wedge \tau} Z_u^2 d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right),$$

denn wir dürfen den vorherigen Teil anwenden mit $X = Y = Z$, d.h. für alle Stoppzeiten $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ mit $\tilde{\sigma} < \tilde{\tau}$ gilt

$$\mathbb{E} \left((I_{t \wedge \tilde{\tau}}(Z) - I_{t \wedge \tilde{\sigma}})^2 \mid \mathcal{F}_{\tilde{\sigma}} \right) = \mathbb{E} \left(\int_{t \wedge \tilde{\sigma}}^{t \wedge \tilde{\tau}} Z_u^2 d \langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_{\tilde{\sigma}} \right).$$

Wähle $\tilde{\sigma} = s$ und $\tilde{\tau} = \tau \vee s$ ($\Rightarrow \tilde{\sigma} \leq \tilde{\tau}$).

a): Für ω mit $\tau(\omega) \geq s$ gilt $t \wedge \tilde{\tau}(\omega) = t \wedge (\tau(\omega) \wedge s) = t \wedge \tau(\omega)$ und $t \wedge \tilde{\sigma}(\omega) = s = s \wedge \tau(\omega)$.

b): Für ω mit $\tau(\omega) < s$ gilt $t \wedge \tilde{\tau}(\omega) = t \wedge s = s$ und $t \wedge \tilde{\sigma}(\omega) = t \wedge s = s$ sowie $t \wedge \tau(\omega) = \tau(\omega)$ und $s \wedge \tau(\omega) = \tau(\omega)$. Insbesondere verschwinden hier alle Integrale (beachte die Integrationsgrenzen).

Für $t \mapsto I_t(\tilde{X}) - I_{t \wedge \tau}(\tilde{X})$ gilt

$$\mathbb{E} \left(\left(I_t(\tilde{X}) - I_{t \wedge \tau}(\tilde{X}) \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\int_{t \wedge \tau}^t \tilde{X}_u^2 d \langle M \rangle_u \right) = 0$$

denn für $\{\tau \leq t\}$ gilt $\int_{\tau}^t \tilde{X}_u^2 d \langle M \rangle_u = \int_{\tau}^t 0 d \langle M \rangle_u = 0$ und für $\{\tau > t\}$ gilt $(t \wedge \tau, t] = \emptyset$.
Damit ist $\langle Z \rangle = 0$ \mathbb{P} -f.s. \square

Beispiel:

Betrachte das stochastische Integral $\int_0^t \underbrace{B_s}_{=: X_s} d \underbrace{B_s}_{M_s}$.

1): Approximiere $X = B$ durch einfache Prozesse (wobei wir vereinfachen, dass die Sprunghöhen nicht beschränkt sein sollen). Dazu setze

$$B_s^n(\omega) = B_0(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{k=0}^{2^n-1} B_{\frac{k}{2^n}t}(\omega) \cdot \mathbb{1}_{(\frac{k}{2^n}t, \frac{k+1}{2^n}t]}(s).$$

(dies ist kein einfacher Prozess, da die $B_{\frac{k}{2^n}t}$ nicht beschränkt sind). Die Annahme, dass X beschränkt ist, kann aufgehoben werden. Wären diese beschränkt, so würde $[B^n - B]_t \rightarrow 0$ gelten nach dem Lemma 2.4 und gemäß Proposition 2.6.

2): Wir zeigen:

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \underbrace{B_{\frac{k}{2^n}t}}_{B_k} \left(B_{\frac{k+1}{2^n}t} - B_{\frac{k}{2^n}t} \right)$$

konvergiert in \mathcal{L}^2 . Hierfür nutzen wir, dass

$$B_{k+1}^2 - B_k^2 = (B_{k+1} - B_k)^2 + 2 \cdot B_k (B_{k+1} - B_k)$$

bzw.

$$B_k (B_{k+1} - B_k) = \frac{1}{2} (B_{k+1}^2 - B_k^2) - \frac{1}{2} (B_{k+1} - B_k)^2.$$

Damit gilt

$$\sum_k B_k (B_{k+1} - B_k) = \frac{1}{2} B_t^2 - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_k (B_{k+1} - B_k)^2}_{=V_t^{(2)}(\Pi)}$$

wobei der letzte Teil in Wahrscheinlichkeit gegen die quadratische Variation konvergiert, falls $\|\Pi\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. Für die Brownsche Bewegung lässt sich zeigen, dass auch \mathcal{L}^2 -Konvergenz vorliegt. Damit folgt insgesamt

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

3.3.A. Eine Charakterisierung des Integrals

Seien $M, N \in \mathcal{M}_2^c, X \in \mathcal{L}^*(M), Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Dann existieren $I_t^M(X) = \int_0^t X_s dM_s$ und $I_t^N(Y) = \int_0^t Y_s dN_s$, wobei $I^N, I^M \in \mathcal{M}_2^c$ und die quadratischen Variationen sind gegeben durch $\langle I^M(X) \rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$ sowie $\langle I^N(Y) \rangle_t = \int_0^t Y_u^2 d\langle N \rangle_u$. Das Ziel ist ein Ausdruck der Form

$$\langle I^M(X), I^N(Y) \rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N \rangle_u \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (*)$$

Lemma:

(*) gilt für $X, Y \in \mathcal{L}_0$.

Beweis:

Sei $0 \leq s < t < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left(I_t^M(X) - I_s^M(X) \right) \cdot \left(I_t^N(Y) - I_s^N(Y) \right) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_s^t X_u Y_u d\langle M, N \rangle_u \mid \mathcal{F}_s \right) \end{aligned}$$

genau dann, wenn (*) gilt. □

Proposition 3.3.5 (Kunita & Watanabe):

Seien $M, N \in \mathcal{M}_2^c$ und $X \in \mathcal{L}^*(M), Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Dann gilt \mathbb{P} -f.s.

$$\int_0^t |X_s Y_s| d\xi_s \leq \left(\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}}$$

wobei ξ_s die Totalvariation von $\tilde{\xi} := \langle M, N \rangle$ auf $[0, s)$ sei.

Beweis:

Wir benutzen Problem 1.5.7(iv) in [KS10]: Für \mathbb{P} -f.a. ω gilt

$$\xi_t(\omega) - \xi_s(\omega) \leq \frac{1}{2} (\langle M \rangle_t(\omega) - \langle M \rangle_s(\omega) + \langle N \rangle_t(\omega) - \langle N \rangle_s(\omega)).$$

Also ist $\xi(\omega)$ absolutstetig bzgl. $\varphi(\omega) := \frac{1}{2} (\langle M \rangle + \langle N \rangle)(\omega)$ für \mathbb{P} -f.a. ω . Sei $\hat{\Omega}$ die Menge aller ω , für die $\xi(\omega)$ absolutstetig bzgl. $\varphi(\omega)$ ist.

Für $\omega \in \hat{\Omega}$ existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym ein $f_i(\cdot, \omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3$ mit

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_t(\omega) &= \int_0^t f_1(s, \omega) d\varphi_s(\omega) \\ \langle N \rangle_t(\omega) &= \int_0^t f_2(s, \omega) d\varphi_s(\omega) \\ \xi_t(\omega) = \langle M, N \rangle_t(\omega) &= \int_0^t f_3(s, \omega) d\varphi_s(\omega). \end{aligned}$$

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existiert ein $\tilde{\Omega}_{\alpha, \beta} \subset \hat{\Omega}$ mit $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}_{\alpha, \beta}) = 1$ derart, dass auf $\tilde{\Omega}_{\alpha, \beta}$ gilt

$$0 \leq \langle \alpha M + \beta N \rangle_t - \langle \alpha M + \beta N \rangle_u = \int_u^t \alpha^2 f_1(s, \cdot) + 2\alpha\beta f_3(s, \cdot) + \beta^2 f_2(s, \cdot) d\varphi_s \quad (**)$$

für jede Wahl $0 \leq u < t < \infty$. Also existiert für alle $\omega \in \tilde{\Omega}_{\alpha, \beta}$ ein $T_{\alpha, \beta}(\omega) \in \mathcal{B}([0, \infty))$, sodass $\int_{T_{\alpha, \beta}} d\varphi_s(\omega) = 0$ und $\alpha^2 f_1(t, \cdot) + 2\alpha\beta f_3(t, \cdot) + \beta^2 f_2(t, \cdot) \geq 0$ für $t \notin T_{\alpha, \beta}(\cdot)$.

Setze $\tilde{\Omega} = \bigcap_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}} \tilde{\Omega}_{\alpha, \beta}$ (Maß 1) sowie $T := \bigcup_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}} T_{\alpha, \beta}$ (wobei $\int_{T(\omega)} d\varphi_t(\omega) = 0$ für $\omega \in \tilde{\Omega}$).

Für $t \notin T(\omega)$ gilt (**) für alle $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$, also auch für alle $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Wähle α und β beliebig und ersetze $\alpha \rightarrow \alpha |X_t(\omega)|$ und $\beta \rightarrow |Y_t(\omega)|$. Dann geht (**) über in

$$\alpha^2 |X_t(\omega)|^2 f_1(t, \omega) + 2\alpha |X_t(\omega)| |Y_t(\omega)| f_3(t, \omega) + |Y_t(\omega)|^2 f_2(t, \omega) \geq 0.$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^t \dots d\varphi_s(\omega) = \alpha^2 \int_0^t |X_s(\omega)|^2 \underbrace{f_1(s, \omega) d\varphi_s(\omega)}_{d\langle M \rangle_s} + \dots \\ &\leq \alpha^2 \int_0^t |X_s(\omega)| d\langle M \rangle_s + 2\alpha \int_0^t |X_s(\omega)| |Y_s(\omega)| d\xi_s + \int_0^t |Y_s(\omega)|^2 d\langle N \rangle_s \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Optimierte über α : $\alpha^2 a + 2\alpha b + c \geq 0$ wird minimal, wenn $\alpha = -\frac{b}{a}$. Einsetzen ergibt $0 \leq -\frac{b^2}{a} + c \Leftrightarrow b \leq \frac{a}{c}$, d.h.

$$\int_0^t |X_s(\omega)| |Y_s(\omega)| d\xi_s \leq \left(\int_0^t |X_s|^2 d\langle M \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |Y_s|^2 d\langle N \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Lemma 3.3.6:

Seien $N, M \in \mathcal{M}_2^c$, $X \in \mathcal{L}^*(M)$ und $(X^n)_n$ eine Folge in $\mathcal{L}^*(M)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |X_u^n - X_u|^2 d\langle M \rangle_u = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für ein } T > 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle I(X^n), N \rangle_t = \langle I(X), N \rangle_t \quad \text{für } t \in [0, T] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis:

Nach Problem 1.5.7(iii) in [KS10] gilt mit $\tilde{N} = I(X^n) - I(X)$ für alle $t \leq T$

$$\left| \langle \tilde{N}, N \rangle_t \right|^2 \leq \langle I(X^n - X) \rangle_t \langle N \rangle_t \leq \left(\int_0^T |X_u^n - X_u|^2 d\langle M \rangle_u \right) \langle N \rangle_t,$$

wobei dies fast sicher gegen 0 konvergiert nach Voraussetzung. □

Lemma 3.3.7:

Seien $M, N \in \mathcal{M}_2^c$ und $X \in \mathcal{L}^*(M)$. Dann gilt

$$\langle I^M(X), N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Bemerkung:

Dies ist die gewünschte Aussage für $Y_t(\omega) \equiv 1$.

Beweis:

Zu X existiert eine Folge $(X^n)_n$ in $\mathcal{L}_0(M)$ mit

$$\sup_{T>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |X_u^n - X_u|^2 d\langle M \rangle_u = 0.$$

Also existiert für $T > 0$ eine Teilfolge $(X^{n_k})_k$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T |X_u^{n_k} - X_u|^2 d\langle M \rangle_u = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Damit gilt nach Lemma 3.3.6

$$\begin{aligned} \langle I^M(X), N \rangle_t &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle I_t^M(X^{n_k}), N \rangle_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t X_u^{n_k} d\langle M, N \rangle_u \\ &= \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \end{aligned}$$

mit Proposition 3.3.5, denn

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t X_u^{n_k} d\langle M, N \rangle_u - \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \right| &\leq \int_0^t |X_u^{n_k} - X_u| \cdot 1 d\xi_u \\ &\leq \left(\int_0^t |X_u^{n_k} - X_u|^2 d\langle M \rangle_u \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t 1 d\langle N \rangle_u \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.8:

Seien $M, N \in \mathcal{M}_2^c$, $X \in \mathcal{L}^*(M)$, $Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Dann gelten:

a) (*) gilt.

b) $\mathbb{E} \left((I_t^M(X) - I_t^M(X)) \cdot (I_t^N(Y) - I_s^N(Y)) \mid \mathcal{F}_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_s^t X_u Y_u d\langle M, N \rangle_u \mid \mathcal{F}_s \right)$ für alle $t \geq s$.

Beweis:

(a) \Leftrightarrow (b), also bleibt nur (a) zu zeigen. Damit gilt nach vorherigem Lemma

$$\langle I^M(X), I^N(Y) \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, I^N(Y) \rangle = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N \rangle_u,$$

denn $\langle M, I^N(Y) \rangle_t = \int_0^t Y_u d\langle M, N \rangle_u$ nach vorherigem Lemma. □

Proposition 3.3.9:

Sei $M \in \mathcal{M}_2^c$ und $X \in \mathcal{L}^*(M)$. Dann ist $I^M(X)$ das eindeutige Martingal $\Phi \in \mathcal{M}_2^c$, das

$$\langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (\Delta)$$

für alle $N \in \mathcal{M}_2^c$ erfüllt.

Beweis:

Das vorherige Lemma zeigt, dass $\Phi = I^M(X)$ (Δ) erfüllt.

Eindeutigkeit: Erfülle $\Phi \in \mathcal{M}_2^c$ (Δ) für alle $N \in \mathcal{M}_2^c$. Dann gilt nach dem vorherigen Lemma

$$\langle \Phi - I^M(X), N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u - \langle I^M(X), N \rangle_t = 0.$$

Wähle nun $N := \Phi - I^M(X)$, so ist $N \in \mathcal{M}_2^c$ mit

$$\langle N \rangle_t = \langle N, N \rangle_t = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \Rightarrow N_t \equiv 0.$$

□

Notation:

Für $N_t := \int_0^t X_s dM_s$ schreibe $dN = X dM$.

Korollar 3.3.10:

Sei $M \in \mathcal{M}_2^c$, $X \in \mathcal{L}^*(M)$, $N = I^M(X)$, $Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Dann gilt $X \cdot Y \in \mathcal{L}^*(M)$ und

$$I^N(Y) = I^M(X \cdot Y),$$

oder kurz

$$Y dN = X \cdot Y dM.$$

Beweis:

Integrierbarkeit: $X \cdot Y \in \mathcal{L}^*(M)$. Denn es gilt

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t X_s^2 Y_s^2 d\langle M \rangle_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s \right) < \infty$$

nach Voraussetzung.

Sei $\tilde{N} \in \mathcal{M}_2^c$ beliebig. Dann ist $d\langle N, \tilde{N} \rangle_s = X_s d\langle M, \tilde{N} \rangle_s$ gemäß Voraussetzung. Daraus folgt mit Lemma 3.3.7

$$\langle I^M(XY), \tilde{N} \rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, \tilde{N} \rangle_u = \int_0^t Y_u d\langle N, \tilde{N} \rangle_u = \langle I^N(Y), \tilde{N} \rangle_t.$$

Daraus folgt mit Satz 3.3.9 $I^N(Y) = I^M(XY)$ \mathbb{P} -f.s.

□

3.3.B. Integrale bezüglich stetiger lokaler Martingale

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(\mathcal{F}_t)_t$ erfülle die üblichen Bedingungen. Sei $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$.

Definition 3.3.11 (Klasse von Integranden):

Sei \mathcal{P} die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren, adaptierten Prozessen mit

$$\mathbb{P} \left(\int_0^T X_t^2 d\langle M \rangle_t < \infty \right) = 1 \quad (*)$$

für alle $T \geq 0$. \mathcal{P}^* bezeichne die Teilklasse aller progressiv messbaren Prozesse.

Im Folgenden sei $X \in \mathcal{P}^*$. Falls $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ absolutstetig ist für \mathbb{P} -f.a. ω , so genügt es, $X \in \mathcal{P}$ zu fordern.

Konstruktion des stochastischen Integrals:

1): Für $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ und eine Folge $\sigma_n \uparrow \infty$ \mathbb{P} -f.s. mit $(M_{t \wedge \sigma_n})_t \in \mathcal{M}_2^c$. (Damit wir in \mathcal{M}_2 sind, ggf. σ_n durch $\sigma_n \wedge n$ ersetzen).

2): Für $X \in \mathcal{P}^*$, definiere $\tilde{\sigma}_n := n \wedge \inf\{t \geq 0 : \int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s \geq n\}$. Da $X \in \mathcal{P}^*$, gilt $\tilde{\sigma}_n \uparrow \infty$ \mathbb{P} -f.s. gemäß (*).

3): Für $\tau_n := \sigma_n \wedge \tilde{\sigma}_n \uparrow \infty$ \mathbb{P} -f.s. setze $M_t^n := M_{t \wedge \tau_n} (\Rightarrow M^n \in \mathcal{M}_2^c)$ und $X_t^n := X_t \mathbb{1}_{\{t \leq \tau_n\}}$. Damit ist $X^n \in \mathcal{L}^*(M^n)$.

Damit ist $I^{M^n}(X^n)$ wohldefiniert.

Korollar:

Sei $M \in \mathcal{M}_2^c, X \in \mathcal{L}^*(M)$ und $\tilde{M} \in \mathcal{M}_2^c, \tilde{X} \in \mathcal{L}^*(\tilde{M})$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ und τ eine Stoppzeit mit $X_{t \wedge \tau} = \tilde{X}_{t \wedge \tau}$ und $M_{t \wedge \tau} = \tilde{M}_{t \wedge \tau}$ \mathbb{P} -f.s. Dann gilt

$$I_{t \wedge \tau}^M(X) = I_{t \wedge \tau}^{\tilde{M}}(\tilde{X}).$$

4): Mit diesem Korollar gilt

$$I_t^{M^n}(X^n) = I_t^{M^m}(X^m)$$

für $0 \leq t \leq \tau_n$ für alle Paare $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ (und daher $\tau_n \leq \tau_m$). Dies erlaubt die Definition

$$I_t^M(X) := I_t^{M^n}(X^n) \text{ auf } \{0 \leq t \leq \tau_n\}. \quad (**)$$

5): Das so definierte $I(X)$ ist wohldefiniert, unabhängig von Wahl der $(\sigma_n)_n$ und stetig in t , d.h. $t \mapsto I_t(X)(\omega)$ ist stetig für \mathbb{P} -f.a. ω , und ein lokales Martingal (verwende $(\tau_n)_n$ als lokalisierende Folge).

Definition 3.3.12:

Sei $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ und $X \in \mathcal{P}^*$. Das stochastische Integral von X bezüglich M ist der stochastische Prozess $I(X) = (I_t(X))_t \in \mathcal{M}^{c,loc}$, der durch (**) definiert wird. Schreiben $\int_0^t X_s dM_s$.

Vorsicht: Nicht alle Eigenschaften des stochastischen Integrals bleiben bestehen. In der Regel gelten nicht:

- Martingaleigenschaft: $\mathbb{E}(I_t(X) | \mathcal{F}_s) \neq I_s(X)$. (u.U. existiert die linke Seite nicht)

- $\mathbb{E}(I_t(X)^2) \neq \mathbb{E} \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$. (u.U. existiert die rechte Seite nicht)
- $\|I(X)\| \neq [X]$.
- $\mathbb{E}((I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s) \neq \mathbb{E} \left(\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u | \mathcal{F}_s \right)$.
- Lemma 3.3.3.

Die Pfadeneigenschaften gelten weiter (Beweis per Lokalisierung):

- $I_0(X) = 0$ \mathbb{P} -f.s.
- Linearität des Integrals.
- $\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$ \mathbb{P} -f.s.
- $\langle I^M(X), I^N(Y) \rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N \rangle_u$.
- $I_{t \wedge \tau}(X) = I_t(\tilde{X})$ mit $\tilde{X} = X_t \mathbb{1}_{\{t \leq \tau\}}$ für Stoppzeiten τ .

Proposition 3.3.13:

Sei $M \in \mathcal{M}^{2,loc}$, $X \in \mathcal{P}^*(M)$. Dann ist $I^M(X)$ das eindeutige $\Phi \in \mathcal{M}^{c,loc}$ mit

$$\langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u$$

für alle $t \geq 0$ \mathbb{P} -f.s. und alle $N \in \mathcal{M}^{c,loc}$.

Beweis:

Mit Lokalisierung führe dies zurück auf die analoge Proposition für stochastische Integrale bezüglich Martingalen. \square

Aufgabe 3.3.14:

Sei W eine Brownsche Bewegung, $\varepsilon \in [0, 1]$ und $\Pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ eine Partition von $[0, t]$. Definiere

$$S_\varepsilon(\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} ((1 - \varepsilon)W_{t_i} + \varepsilon W_{t_{i+1}}) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Dann konvergiert dies für $\|\Pi\| \rightarrow 0$ im \mathcal{L}^2 -Sinne gegen $\frac{1}{2}W_t^2 + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)t$.

Beachte, dass die rechte Seite nur ein Martingal ist, wenn $\varepsilon = 0$ ist (dies war die Definition des stochastischen Integrals bzw. Itô-Integrals). Die Abhängigkeit von ε auf der rechten Seite liegt an der unbeschränkten Variation der Pfade der Brownschen Bewegung.

3.4. Substitutionsregel / Itô-Formel

Wir wissen $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$ bzw. $W_t dW_t = \frac{1}{2}d(W_t^2) - \frac{1}{2}dt$. Mit $f(x) = x^2$ lässt sich dies schreiben als

$$W_t^2 = f(W_t) = 2 \int_0^t W_s dW_s + \int_0^t ds$$

oder

$$df(W_t) = 2W_t dW_t + dt.$$

Definition 3.4.1 (Semimartingale):

Ein stetiges Semimartingal X ist ein adaptierter, stochastischer Prozess mit Darstellung

$$X_t = X_0 + M_t + B_t \quad (\Delta)$$

für $t \geq 0$ mit $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ und $(B_t)_t$ ist gegeben als $B_t = A_t^+ - A_t^-$ mit stetigen, monoton wachsenden, adaptierten Prozessen A^\pm mit $A_0^\pm = 0$ \mathbb{P} -f.s.

Konvention: $B_t = A_t^+ - A_t^-$ hat maximale Darstellung, d.h. A_t^+ ist die positive Variation von B auf $[0, t]$ und entsprechend für die negative Variation. Dann gilt für die Totalvariation von B $\hat{B}_t = A_t^+ + A_t^-$.

Aufgabe 3.4.2:

Sei X ein stetiges Semimartingal. Angenommen $X_t = X_0 + M_t + B_t = X_0 + \tilde{M}_t + \tilde{B}_t$. Dann gilt $M = \tilde{M}$ und $B = \tilde{B}$ für $t \geq 0$ \mathbb{P} -f.s.

Beweis:

Es gilt $M_t - \tilde{M}_t \in \mathcal{M}^{c,loc}$ und $M_t - \tilde{M}_t = \tilde{B}_t - B_t$ hat endliche Totalvariation. Wähle $M_t - \tilde{M}_t \in \mathcal{M}_2^c$, dann gilt $M_t - \tilde{M}_t = 0$ \mathbb{P} -f.s. Wähle eine lokalisierende Folge, so folgt die Behauptung. \square

3.4.A. Itô-Formel

Wir wollen zeigen: „Eine glatte Funktion eines Semimartingals ist ein Semimartingal“.

Satz 3.4.3 (Itô, 1944, Kunita & Watanabe, 1967):

Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und X ein stetiges Semimartingal mit Darstellung (Δ) . Dann gilt \mathbb{P} -f.s.

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dM_s + \int_0^t f'(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s \quad (*)$$

für alle $0 \leq t < \infty$.

Bemerkung 3.4.4:

Für festes ω und t ist $s \mapsto X_s(\omega)$ auf $[0, t]$ beschränkt. Folglich ist $\int_0^t f'(X_s) dM_s$ als lokales Martingal definiert.

$t \mapsto \int_0^t \dots dB_s + \int_0^t \dots d\langle M \rangle_s$ ist Summe zweier Stieltjes-Integrale, hat beschränkte Variation und daher ist eine Zerlegung in A^+ und A^- möglich. Daher ist die rechte Seite ein Semimartingal.

Bemerkung 3.4.5:

Falls $X = M = W$ (Brownsche Bewegung) und $f(x) = x^2$ ist, so gilt

$$d(W_t^2) = 2x|_{x=W_t} dW_t + \frac{1}{2} \cdot 2|_{x=W_t} d\langle W \rangle_t = 2W_t dW_t + d\langle W \rangle_t = 2W_t dW_t + dt.$$

Also gilt $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$.

Beispiel 3.4.6:

Sei $M = W$ (Brownsche Bewegung) und $X \in \mathcal{P}^*$ (für Integrale bzgl. der Brownschen Bewegung genügt \mathcal{P}). Definiere für $0 \leq s < t < \infty$

$$\xi_t^s(X) := \int_s^t X_u dW_u - \frac{1}{2} \int_s^t X_u^2 du$$

und

$$\xi_t(X) = \xi_t^0(X).$$

Schreibe $\xi_t = \xi_t(X)$.

Dann ist $Z_t := e^{\xi_t}$ ein Supermartingal. Zeige zunächst, dass Z ein lokales Martingal ist. Da Z nichtnegativ ist, folgt mit Problem 5.19(ii) aus [KS10], dass Z ein Super-MG ist. Hier nutzen wir die Itô-Formel. Wir zeigen, dass $(Z_t)_t$ die stochastische Differentialgleichung

$$dZ_t = Z_t X_t dW_t$$

erfüllt. ξ_t ist ein Semimartingal, d.h. $\xi_t = N_t + B_t$ mit einem lokalen Martingal $N_t = \int_0^t X_s dW_s$ und $B_t = -\frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 ds$ ist von beschränkter Variation.

Wähle $f(x) = e^x$ und $Z_t = f(\xi_t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} dZ_t &= f'(\xi_t) d\xi_t + \frac{1}{2} f''(\xi_t) d\langle N \rangle_t \\ &= e^{\xi_t} \left(d\xi_t + \frac{1}{2} d\langle N \rangle_t \right) = Z_t \left(X_t dW_t - \frac{1}{2} X_t^2 dt + \frac{1}{2} X_t^2 dt \right) \\ &= Z_t X_t dW_t. \end{aligned}$$

Sei $X_t = X_0 + M_t + B_t$ vom Typ $X_t = \int_0^t b(s, \cdot) ds + \int_0^t \sigma(s, \cdot) dW_s$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle M \rangle_t \\ &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma^2(t, \cdot) dt \\ &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2 \end{aligned}$$

mit der „Multiplikationsregel“

$$\begin{aligned} (dX_t)^2 &= (b(t, \cdot) dt + \sigma(t, \cdot) dW_t)^2 \\ &= b(t, \cdot)^2 (dt)^2 + b(t, \cdot) \sigma(t, \cdot) (dt dW_t + dW_t dt) + \sigma(t, \cdot)^2 (dW_t)^2 = \sigma(t, \cdot) dt, \end{aligned}$$

wobei hier $dt dt = 0$, $dt dW_t = 0$, $dW_t dt = 0$ und $dW_t dW_t = dt$ eingeht.

Beweis:

1. Schritt: Lokalisieren.

Definiere

$$\tau_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } |X_0| \geq n \\ \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n \text{ oder } \hat{B}_t \geq n \text{ oder } \langle M \rangle_t \geq n\} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei \hat{B}_t die Totalvariation von B auf $[0, t]$ bezeichnet. Dabei sei $\inf \emptyset = \infty$. Dann gilt $\tau_n \uparrow$ und $\tau_n \uparrow \infty$ \mathbb{P} -f.s. Es genügt, (*) zu zeigen für $t \rightarrow t \wedge \tau_n$ bzw. $X_{t \wedge \tau_n}, M_{t \wedge \tau_n}$. Folglich dürfen wir annehmen, dass eine Konstante $K > 0$ existiert mit $|X_0|, |M_t|, \hat{B}_t, |\langle M \rangle_t| \leq K$ für alle t . Also ist $(M_t)_t$ ein beschränktes Martingal und die Integrierbarkeitsvoraussetzungen für stochastische Integrale sind erfüllt. Ferner gilt $|X_t| \leq |X_0| + |M_t| + |B_t| \leq 3K$ und $|B_t| \leq |B_t - B_0| \leq \hat{B}_t$. Somit können wir f außerhalb von $[-3K, 3K]$ abändern, derart dass $f \in \mathcal{C}^2$ kompakten Träger hat. Also existiert ein $L > 0$, sodass $|f|, |f'|, |f''| \leq L$.

2. Schritt: Taylor-Entwicklung.

Sei $t > 0$, Π eine Partition mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^m (f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}})) \\ &= \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m f''(\eta_k) (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \end{aligned}$$

mit Zwischenstellen $\eta_k(\omega) = X_{t_{k-1}}(\omega) + \Theta_k(\omega) (X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega))$ mit $\Theta_k(\omega) \in [0, 1]$. Beachte dass wir Θ_k so wählen können, dass $f''(\eta_k)$ messbar ist.

Idee: Auflösen nach $f''(\eta_k)$, sofern $X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \neq 0$. Falls dies 0 ist, setze $\Theta_k(\omega) = 0$ und $f''(\eta_k) = f''(X_{t_{k-1}}(\omega))$. Dann gilt $f(X_t) - f(X_0) = J_1 + J_2 + \frac{1}{2}J_3$ mit

$$\begin{aligned} J_1 &= J_1(\Pi) := \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \\ J_2 &= J_2(\Pi) := \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}) \\ J_3 &= J_3(\Pi) := \sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$J_1(\Pi) \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} \int_0^t f'(X_s) dB_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (a)$$

als Lebesgue-Stieltjes-Integral. Ferner ist $Y_s := f'(X_s)$ ein stochastischer Prozess aus \mathcal{L}^* . Daher ist $Y_s^\Pi := f'(X_0) \mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}}) \cdot \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(s)$ einfach, d.h. aus \mathcal{L}_0 . Da $(Y_s)_s$ stetig ist, gilt also $(Y_s^\Pi)_s \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} (Y_s)_s$ und es gilt

$$\mathbb{E} \left(I_t(Y^\Pi - Y) \right)^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^t |Y_s^\Pi - Y_s|^2 d\langle M \rangle_s \right) \rightarrow 0,$$

d.h. es gilt $J_2(\Pi) \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} \int_0^t Y_s dM_s$ in \mathcal{L}^2 .

3. Schritt: Zerlege J_3 .

Zerlege $J_3 = J_4 + J_5 + J_6$, wobei

$$\begin{aligned} J_4 &= J_4(\Pi) := \sum_{k=1}^m f''(\eta_k) (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \\ J_5 &= J_5(\Pi) := 2 \cdot \sum_{k=1}^m f''(\eta_k) (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) (M_{t_k} - M_{t_{k-1}}) \\ J_6 &= J_6(\Pi) := \sum_{k=1}^m f''(\eta_k) (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2. \end{aligned}$$

Beachte, dass wegen $\hat{B}_t \leq K$ gilt

$$\begin{aligned} |J_4| + |J_5| &\leq \underbrace{\|f''\|_\infty}_{\leq L} \left(\max_k |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \hat{B}_t + 2 \max_k |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}| \hat{B}_t \right) \\ &\leq 2LK \left(\max_k |\cdot - \cdot| + \max_k |\cdot - \cdot| \right) \\ &\xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

da B und M gleichmäßig stetig sind auf $[0, t]$.

4. Schritt: $J_6(\Pi)$.

Vergleiche J_6 mit $J_6^* = J_6^*(\Pi) := \sum_{k=1}^m f''(X_{t_{k-1}}) (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2$, so gilt

$$|J_6^* - J_6| \leq \max_k |f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})| V_t^2(\Pi).$$

Nach Lemma 1.5.9 aus [KS10] gilt: Falls $|M_s| \leq K \forall s$, dann gilt $\mathbb{E} (V_t^2(\Pi))^2 \leq 6K^4$. Daher folgt mit Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E} (|J_6^* - J_6|) \leq \sqrt{6K^4} \underbrace{\sqrt{\mathbb{E} \left(\max_k |f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})|^2 \right)}}_{\xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} 0}$$

da f'' stetig und beschränkt ist. Es bleibt zu zeigen, dass $J_6^* \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s$ in einem geeigneten Sinne. Vergleiche dazu J_6^* mit

$$J_7 = J_7(\Pi) := \sum_{k=1}^m f''(X_{t_{k-1}}) (\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}}).$$

Beachte, dass $J_7 \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s$ \mathbb{P} -f.s. gilt. Nun gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|J_6^* - J_7|^2) &= \mathbb{E} \left(\left| \sum_{k=1}^m f''(X_{t_{k-1}}) (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}}) \right|^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^m f''(X_{t_{k-1}})^2 |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}^2 - (\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}})|^2 \right) \\ &\leq 2 \underbrace{\|f''\|_\infty^2}_{\leq L^2} \mathbb{E} \left(\sum_k (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + \sum_k |\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}}|^2 \right) \\ &\leq 2L^2 \mathbb{E} \left(V_t^4(\Pi) + \max_k |\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}}| \langle M \rangle_t \right). \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5.10 aus [KS10] gilt: Ist $|M_s| \leq K$, so folgt $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \mathbb{E} V_t^4(\Pi) = 0$. Also folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\mathbb{E}(|J_6^* - J_7|^2) \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} 0.$$

Somit gilt $J_3 \xrightarrow{\|\Pi\| \rightarrow 0} \int_0^t f''(X - s) d\langle M \rangle_s$ in \mathcal{L}^2 , also auch in \mathcal{L}^1 .

5. Schritt:

J_1, J_2, J_3 konvergieren \mathbb{P} -f.s. bzw. in \mathcal{L}^1 , sodass zu jeder Folge $(\Pi^n)_n$ mit $\|\Pi^n\| \rightarrow 0$ eine Teilfolge $(\Pi^{n_k})_k$ existiert, sodass $J_1(\Pi^{n_k}) \rightarrow \int_0^t f'(X_s) dB_s$, $J_2(\Pi^{n_k}) \rightarrow \int_0^t f'(X_s) dM_s$ und $J_3(\Pi^{n_k}) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s$ \mathbb{P} -f.s.

Somit gilt für festes t die Aussage \mathbb{P} -f.s. Da die rechte und linke Seite von (*) stetige stochastische Prozesse sind, sind rechte und linke Seite ununterscheidbar, d.h. $\mathbb{P}(\text{(*) gilt } \forall t \geq 0) = 1$. \square

Verallgemeinerung:

Satz 3.4.7 (Mehrdimensionale Itô-Formel):

Sei $M_t = \begin{pmatrix} M_t^1 \\ \vdots \\ M_t^d \end{pmatrix}$ mit $M^i \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $B_t = \begin{pmatrix} B_t^1 \\ \vdots \\ B_t^d \end{pmatrix}$ mit B_i stetig, adaptiert und von beschränkter Variation mit $B_0^i = 0$ \mathbb{P} -f.s. Sei $X_0 \in \mathcal{F}_0$ und $X_t = X_0 + M_t + B_t$ ein \mathbb{R}^d -wertiger stochastischer Prozess und $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Dann gilt \mathbb{P} -f.s. für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{d}{dt} f(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{d}{dx_i} f(s, X_s) dB_s^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{d}{dx_i} f(s, X_s) dM_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{d^2}{dx_i dx_j} f(s, X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_t. \end{aligned}$$

Beweis:

Ohne Beweis. □

Bemerkung:

Für $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ wende den Satz komponentenweise an, d.h. für f_1, \dots, f_k . Kurz:

$$df(t, X_t) = \frac{d}{dt}f(t, X_t)dt + \langle \nabla_x f(t, \cdot) |_{X_t}, dX_t \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\text{Hess}_x f(t, \cdot) |_{X_t})_{ij} d\langle M^i, M^j \rangle.$$

Lemma 3.4.8 (Partielle Integration):

Seien $X_t = X_0 + M_t + B_t, Y_t = Y_0 + N_t + C_t$ stetige Semimartingale. Dann gilt

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle M, N \rangle_t.$$

Beweis:

Setze $d = 2$ und $f(t, x, y) = x \cdot y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} df(X_t, Y_t) &= 0 \cdot dt + \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Big|_{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}, d \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} f(\cdot) d\langle M, M \rangle_t + 2 \frac{d^2}{dx dy} f(\cdot) d\langle M, N \rangle_t \right) \\ &+ \frac{d^2}{dy^2} f(\cdot) d\langle N, N \rangle_t \\ &= Y_t dX_t + X_t dY_t + d\langle M, N \rangle_t. \end{aligned}$$

□

3.4.B. Martingalcharakterisierung der Brownschen Bewegung

Satz 3.4.9 (Levys Charakterisierung der Brownschen Bewegung):

Sei $X = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ ein stetiger, adaptierter, \mathbb{R}^d -wertiger stochastischer Prozess. Angenommen $M_t^k := X_t^k - X_0^k, t \geq 0$ ist ein stetiges, lokales Martingal für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ mit $\langle M^k, M^j \rangle_t = \delta_{kj} \cdot t$. Dann ist X eine d -dimensionale Brownsche Bewegung.

Beweis:

Da keine Anfangsbedingung benötigt wird, X stetige Pfade nach Voraussetzungen besitzt und der Prozess adaptiert ist, bleibt zu zeigen, dass X unabhängige Inkremente hat mit $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)\text{Id})$. Wegen Lemma 2.6.13 aus [KS10] genügt es zu zeigen, dass \mathbb{P} -f.s. gilt

$$\mathbb{E} \left(e^{i\langle u, X_t - X_s \rangle} \mid \mathcal{F}_s \right) = e^{-1/2 \|u\|^2 (t-s)}$$

für alle $u \in \mathbb{R}^d$ und $0 \leq s < t$. Setze $f(x) = e^{i\langle u, x \rangle}$, dann gilt $f_{x_j}(x) = i u_j e^{i\langle u, x \rangle}$ und $f_{x_j, x_k}(x) = -u_j u_k e^{i\langle u, x \rangle}$. Es gilt die Zerlegung $X_t = X_s + (M_t - M_s) + 0$, sodass nach Itô's Formel

$$f(X_t) = f(X_s) + \int_s^t f_t(\dots) dt + 0 + \sum_{j=1}^d \int_s^t f_{x_j}(X_r) dM_r^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_s^t f_{x_j, x_k}(X_r) \underbrace{d\langle M^j, M^k \rangle_r}_{=\delta_{jk} \cdot dr},$$

und damit

$$e^{i\langle u, X_t \rangle} = e^{i\langle u, X_s \rangle} + i \sum_{j=1}^d u_j \int_s^t e^{i\langle u, X_r \rangle} dM_r^j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d u_j^2 \int_s^t e^{i\langle u, X_r \rangle} dr$$

gilt.

Da M^j lokale Martingale waren und zusätzlich $\langle M^j \rangle_t = t$, haben wir $M^j \in \mathcal{M}_2^c$. Da der Integrand in dM_r^j beschränkt ist, ist das stochastische Integral ein Martingal. Daher gilt $\mathbb{E} \left(\int_s^t e^{i\langle u, X_r \rangle} dM_r^j \mid \mathcal{F}_s \right) = 0$ f.s..

Für den letzten Summanden sei $A \in \mathcal{F}_s$, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{i\langle u, X_t - X_s \rangle} \mathbb{1}_A \right) &= \mathbb{E} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \|u\|^2 \int_s^t e^{i\langle u, X_r - X_s \rangle} dr \right) \mathbb{1}_A \right) \\ &= \mathbb{P}(A) - \frac{1}{2} \|u\|^2 \int_s^t \mathbb{E} \left(e^{i\langle u, X_r - X_s \rangle} \mathbb{1}_A \right) dr. \end{aligned}$$

Also haben wir eine Integralgleichung für $q(t) := \mathbb{E} \left(e^{i\langle u, X_t - X_s \rangle} \mathbb{1}_A \right)$. Die Lösung für $t \geq s$ ist $q(t) = \mathbb{P}(A) e^{-\frac{1}{2} \|u\|^2 (t-s)}$ für alle $A \in \mathcal{F}_s$, woraus die Behauptung folgt. \square

3.4.C. Bessel-Prozesse

Proposition 3.4.10:

Die d -dimensionale Brownsche Bewegung W ist rotationsinvariant, d.h. für jede orthogonale Matrix Q ist $(QW_t)_t$ verteilt wie $(W_t)_t$.

Beweis:

Übung. □

Definiere die Distanz einer Brownschen Bewegung vom Ursprung als $R_t := \|W_t\|_2$. Beachte, dass für eine Brownsche Familie $W, \{\mathbb{P}_x\}_x$ die Verteilung von R unter \mathbb{P}^x nur von $\|x\|$ abhängt.

Beweis:

Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| = \|y\|$. Um zu zeigen, dass die Verteilung von R unter \mathbb{P}^x und \mathbb{P}^y gleich ist, zeige, dass eine orthogonale Matrix Q existiert, sodass $y = Qx$. Definiere $\tilde{W}_t := QW_t$ (dies ist eine Brownsche Bewegung mit Start in y , wenn $W_0 = x$). Daher gilt für jedes $F \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty)))$

$$\mathbb{P}^x (R \in F) = \mathbb{P}^x ((\|W_t\|)_t \in F) = \mathbb{P}^x ((\|QW_t\|)_t \in F) = \mathbb{P}^y ((\|W_t\|)_t \in F) = \mathbb{P}^y (R \in F)$$

□

Definition 3.4.11 (Bessel-Prozesse):

Sei $d \geq 2$, $W, \{\mathbb{P}^x\}_x$ eine d -dimensionale Brownsche Familie. Dann heißt $R_t := \|W_t\|$ mit der Familie von Maßen $\{\hat{\mathbb{P}}^r\}$, wobei $\hat{\mathbb{P}}^r := \mathbb{P}^{(r, 0, \dots, 0)}$ d -dimensionale Bessel-Familie. Für gegebenes $r \geq 0$ heißt R auf dem W -Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathbb{P}}^r)$ d -dimensionaler Bessel-Prozess mit Start in r .

Aufgabe 3.4.12:

Die Bessel-Familie ist eine starke Markoffsche Familie.

Proposition 3.4.13 (Zusammenhang zu Semimartingalen und stochastischen Differentialgleichungen):

Sei $d \geq 2, r \geq 0$ und R ein Bessel-Prozess mit Start in r . Dann gilt

$$R_t = r + \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} ds + B_t,$$

wobei $B_t = \sum_{i=1}^d B_t^{(i)}$ mit $B_t^{(i)} = \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} dW_s^{(i)}$ eine eindimensionale SBM ist.

Beweis:

Der Integrand ist fast überall definiert, denn es gilt $\{0 \leq s \leq t : R_s = 0\} \subset \{0 \leq s \leq t : W_s^{(1)} = 0\}$ und nach Theorem 2.9.6 aus [KS10] gilt für \mathbb{P} -f.a. festen ω , dass $\{0 \leq s < t : W_s^{(1)} = 0\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Ferner ist $(B_t^{(i)})_t \in \mathcal{M}_2^c$, denn nach der Itô-Isometrie gilt

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} dW_s \right)^2 \right) = \int_0^t \left(\frac{W_s^{(i)}}{R_s} \right)^2 ds \leq t,$$

da $\left(\frac{W_s^{(i)}}{R_s}\right)^2 \leq 1$.

Für die Kovariation gilt

$$\langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_t = \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} \frac{W_s^{(j)}}{R_s} d \underbrace{\langle W^{(i)}, W^{(j)} \rangle_s}_{\delta_{ij} ds}$$

sodass

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_t &= \left\langle \sum_{i=1}^d B^{(i)}, \sum_{j=1}^d B^{(j)} \right\rangle_t = \sum_{i,j} \langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\frac{W_s^{(i)}}{R_s} \right)^2 ds = \int_0^t \frac{\sum_i (W_s^{(i)})^2}{R_s^2} ds \\ &= t. \end{aligned}$$

Daher folgt nach dem Levyschen Charakterisierungssatz, dass $B = (B_t)_t$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist.

Betrachte $f(x) := \|x\|$, so gilt $f_{x_i} = \frac{x_i}{\|x\|}$, $f_{x_i, x_j} = \frac{\delta_{ij}}{\|x\|} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^3}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Außerhalb des Ursprungs wollen wir Itô's Formel anwenden:

$$\begin{aligned} R_t = f(W_t) &= r + \int_0^t \sum_{i=1}^d f_{x_i}(W_s) dW_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d f_{x_i, x_j}(W_s) d \langle W^{(i)}, W^{(j)} \rangle \\ &= r + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} dW_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{R_s} - \frac{(W_s^{(i)})^2}{R_s^2} \right) ds \\ &= r + B_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d-1}{R_s} ds. \end{aligned}$$

Um das Problem zu umgehen, dass f in 0 nicht differenzierbar ist, betrachte $Y_t = \|W_t\|^2 = R_t^2$, so gilt nach Itô's Formel

$$\begin{aligned} Y_t &= r^2 + 2 \sum_{i=1}^d \int_0^t W_s^{(i)} dW_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_0^t 2 \left(\sum_{i=1}^d 1 \right) ds \\ &= r^2 + 2 \sum_{i=1}^d \int_0^t W_s^{(i)} dW_s^{(i)} + d \cdot t. \end{aligned}$$

Approximiere nun $g(y) := \sqrt{y}$ für $y \geq 0$ via

$$g_\varepsilon(y) := \begin{cases} \frac{3}{8}\sqrt{\varepsilon} + \frac{3}{4\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}y^2 & y < \varepsilon \\ \sqrt{y} & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\varepsilon > 0$. Dann ist $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^2$ und es gilt $g_\varepsilon(y) \rightarrow g(y)$ für jedes $y \geq 0$ und $\varepsilon \rightarrow 0$. Mit Hilfe von Itô's Formel erhalten wir

$$g_\varepsilon(Y_t) = g_\varepsilon(r^2) + \sum_{i=1}^d I_t^{(i)}(\varepsilon) + J_t(\varepsilon) + K_t(\varepsilon),$$

wobei

$$\begin{aligned}
I_t^{(i)}(\varepsilon) &= \int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{Y_s \geq \varepsilon\}} \frac{1}{R_s} + \mathbb{1}_{\{Y_s < \varepsilon\}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left(3 - \frac{Y_s}{\varepsilon} \right) \right) W_s^{(i)} dW_s^i \\
J_t(\varepsilon) &= \int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s \geq \varepsilon\}} \frac{d-1}{2R_s} ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} ds \\
K_t(\varepsilon) &= \int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s < \varepsilon\}} \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \left(3d - (d+2) \frac{Y_s}{\varepsilon} \right) ds
\end{aligned}$$

Es gilt $K_t(\varepsilon) \geq 0$ und $0 \leq \mathbb{E} K_t(\varepsilon) \leq \frac{3d}{4\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \mathbb{P}(Y_s < \varepsilon) ds$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_s < \varepsilon) &\leq \mathbb{P}\left((W_s^1)^2 + (W_s^2)^2 < \varepsilon \right) = \int_{\{x^2+y^2 < \varepsilon\}} \frac{1}{2\pi s} e^{-\frac{x^2+y^2}{2s}} d(x, y) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi s} e^{-\frac{\rho^2}{2s}} \rho d\rho d\theta = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\rho}{s} e^{-\rho^2/(2s)} d\rho,
\end{aligned}$$

sodass mit Fubini sowie der Substitution $v := \frac{\rho}{\sqrt{t}}$ mit $\frac{1}{s} ds = -\frac{2}{v} dv$

$$\int_0^t \mathbb{P}(Y_s < \varepsilon) ds \leq \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\rho}{s} e^{-\rho^2/(2s)} ds d\rho = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \underbrace{\left(\int_{\frac{\rho}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{2\rho}{v} e^{-v^2/2} dv \right)}_{=: h(\rho)} d\rho$$

folgt. Was passiert bei $\rho \rightarrow 0$? Dafür:

$$\begin{aligned}
h(\rho) &= 2\rho \int_{\frac{\rho}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{v} e^{-v^2/2} dv \\
&= 2\rho \left((\log v) e^{-v^2/2} \right) \Big|_{\frac{\rho}{\sqrt{t}}}^1 + \int_{\frac{\rho}{\sqrt{t}}}^1 v \log v e^{-v^2/2} dv + \mathcal{O} \left(\int_1^{\infty} e^{-v^2/2} dv \right).
\end{aligned}$$

Zusammen gilt

$$|h(\rho)| \leq \mathcal{O}(\rho \left| \log(\rho/\sqrt{t}) \right|) + \mathcal{O} \left(\rho \int_{\rho/\sqrt{t}}^1 |v \log v| e^{-v^2/2} dv \right) + \mathcal{O}(\rho) = \mathcal{O}(\rho |\log \rho|) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Unter Ausnutzung der Regel von l'Hôpital folgt

$$\mathbb{E} K_t(\varepsilon) \leq \frac{3d}{4} \frac{\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3d}{4} \frac{d/dx \int_0^x h(\rho) d\rho \Big|_{x=\sqrt{\varepsilon}}}{d/dx x \Big|_{x=\sqrt{\varepsilon}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3d}{4} \frac{h(x) \Big|_{x=\sqrt{\varepsilon}}}{1} = 0,$$

woraus $K_t(\varepsilon) \rightarrow 0$ in L^1 folgt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $I_t^i(\varepsilon) \rightarrow B_t^i$ in L^2 . Unter Beachtung, dass auf $\{Y_s \geq \varepsilon\}$ der

Beitrag von B^i und I^i gleich ist, gilt mit Hilfe der Itô-Isometrie

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(B_t^i - I_t^i(\varepsilon)\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s < \varepsilon\}} \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\left(3 - \frac{Y_s}{\varepsilon}\right)\right) W_s^i dW_s^i\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s < \varepsilon\}} \left(1 - \frac{\sqrt{Y_s}}{2\sqrt{\varepsilon}}\left(3 - \frac{Y_s}{\varepsilon}\right)\right)^2 \frac{(W_s^i)^2}{R_s^2} ds\right) \\ &\leq \int_0^t \mathbb{P}(Y_s < \varepsilon) ds = o(\sqrt{\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Für $d \geq 2$ und einen Bessel-Prozess gilt für festes $t > 0$ $\mathbb{P}(R_t > 0) = 1$. Gilt auch $\mathbb{P}(R_t > 0 \forall t > 0) = 1$, d.h. ist der Ursprung unerreichbar?

Für $d = 1$ gilt $\mathbb{P}(|W_t^1| > 0 \forall t > 0) = 0$, denn wir wissen, dass die 1-dimensionale SBM \mathbb{P} -f.s. unendlich oft in den Ursprung zurückkehrt.

Proposition 3.4.14 (Unerreichbarkeit des Ursprungs für einen d -dimensionalen Bessel-Prozess):

Sei $d \geq 2$, $r \geq 0$ und R ein Bessel-Prozess mit diesen Parametern. Dann gilt

$$\mathbb{P}(R_t > 0 \forall t > 0) = 1.$$

Beweis:

Es genügt, die Behauptung für $d = 2$ zu betrachten, denn für $d > 2$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{(W_t^1)^2 + \dots + (W_t^d)^2} > 0 \forall t > 0\right) \geq \mathbb{P}\left(\sqrt{(W_t^1)^2 + (W_t^2)^2} > 0 \forall t > 0\right) = 1.$$

Für jedes k so, dass $\left(\frac{1}{k}\right)^k < r < k$ gilt, definiere für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}T_k &:= \inf\{t \geq 0 : R_t = \left(\frac{1}{k}\right)^k\} \\ S_k &:= \inf\{t \geq 0 : R_t = k\} \\ \tau_k &:= T_k \wedge S_k \wedge n.\end{aligned}$$

Wir wissen, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{S_k < \infty\} \cap \{\lim_k S_k = \infty\}\right) = 1 \quad (\Delta)$$

Modifiziere $\log x$ für $x < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k}\right)^k$, sodass wir eine \mathcal{C}^2 -Funktion erhalten und nenne dies $\tilde{\log} x$. Mit Hilfe von Itô's Formel gilt

$$d(\tilde{\log} R_t) = \left(\frac{d}{dx} \tilde{\log} R_t\right) dR_t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{\log} R_t\right) (dR_t)^2.$$

Für $t \leq \tau_k$ gilt also wegen $d = 2$ und $(dR_t)^2 = (dB_t)^2 = dt$

$$d \log R_t = \frac{1}{R_t} dR_t - \frac{1}{2R_t^2} (dR_t)^2 = \frac{d-1}{2R_t^2} dt + \frac{1}{R_t} dB_t - \frac{1}{2R_t^2} dt = \frac{1}{R_t} dB_t$$

und damit

$$\log R_{\tau_k} = \log r + \int_0^{\tau_k} \frac{1}{R_s} dB_s$$

bzw.

$$\log r = \mathbb{E} \log R_{\tau_k} - \underbrace{\mathbb{E} \left(\int_0^{\tau_k} \mathbb{1}_{[0, \tau_k]}(s) \frac{1}{R_s} dB_s \right)}_{=0}$$

Daher erhalten wir

$$\log r = -k \log k \mathbb{P}(T_k \leq S_k \wedge n) + \log k \mathbb{P}(S_k \leq T_k \wedge n) + \underbrace{\mathbb{E}((\log R_n) \mathbb{1}_{n < S_k \wedge T_k})}_{\leq k \mathbb{P}(n < S_k \wedge T_k) \leq k \mathbb{P}(S_k > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

und mit $n \rightarrow \infty$

$$\log r = -k \log k \mathbb{P}(T_k \leq S_k) + \log k \mathbb{P}(S_k \leq T_k).$$

Auflösen ergibt

$$\mathbb{P}(T_k \leq S_k) = -\frac{\log r}{k \log k} + \frac{\mathbb{P}(S_k \leq T_k)}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Mit $T := \inf\{t > 0 : R_t = 0\}$ haben wir $T_k \leq T \forall k$ und daher

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq S_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_k \leq S_k) = 0.$$

Das beweist die Behauptung für $r > 0$.

Für $r = 0$ sei $\varepsilon > 0$. Da die Bessel-Familie eine (starke) Markoff-Familie ist, gilt nach dem ersten Teil des Beweises

$$\hat{\mathbb{P}}^0(R_t > 0 \text{ für } t > \varepsilon) = \hat{\mathbb{E}}^0 \left(\hat{\mathbb{P}}^{R_\varepsilon}(R_t > 0 \forall t > 0) \right) = \hat{E}^0(1) = 1,$$

sodass letztlich gilt

$$\hat{\mathbb{P}}^0(R_t > 0 \forall t > 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\mathbb{P}}^0(R_t > 0 \text{ für } t > \varepsilon) = 1.$$

□

Bemerkung:

Wir haben gezeigt, dass die SBM für $d \geq 2$ fast sicher nicht zum Ursprung zurückkehrt. In den Übungen wird gezeigt, dass für $d = 2$ die Brownsche Bewegung beliebig nah an den Ursprung herankommt (d.h. sie erreicht jede Kugel $K_r(0)$). Für $d \geq 3$ sind die Pfade nach unten beschränkt.

3.4.D. Momentenungleichungen für Martingale

Bemerkung:

Sei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung, X ein messbarer, adaptierter Prozess mit $\mathbb{E} \int_0^T |X_t|^{2m} dt < \infty$ für ein $m \geq 1$. Dann gilt

$$\mathbb{E} \left(\left| \int_0^T X_t dW_t \right|^{2m} \right) \leq C_m T^{m-1} \mathbb{E} \int_0^T |X_t|^{2m} dt.$$

Beweis:

Dies ist eine typische Anwendung von Itô's Formel. Definiere dafür $M_t := \int_0^t X_s dW_s$ und $f(x) = |x|^{2m}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} df(M_t) &= 2m |M_t|^{2m-1} dM_t + \frac{1}{2} 2m(2m-1) |M_t|^{2m-2} (dM_t)^2 \\ &= 2m |M_t|^{2m-1} X_t dW_t + m(2m-1) |M_t|^{2m-2} X_t^2 dt. \end{aligned}$$

Also gilt mit der Doob'schen Submartingal-Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |M_t|^{2m} &= 0 + 0 + m(2m-1) \mathbb{E} \int_0^t |M_s|^{2m-2} X_s^2 ds \\ &\leq m(2m-1) \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} |M_s|^{2m-2} \cdot \int_0^t X_s^2 ds \right) \\ &\leq m(2m-1) \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} |M_s|^{2m} \right)^{\frac{2m-2}{2m}} \cdot \mathbb{E} \left(\left(\int_0^t X_s^2 ds \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq m(2m-1) \left(\left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} \mathbb{E} (|M_t|^{2m}) \right)^{\frac{2m-2}{2m}} \cdot \mathbb{E} \left(\left(\int_0^t X_s^2 ds \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Löse nun nach der linken Seite auf. Ferner gilt

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t X_s^2 \cdot 1 ds \right)^m \right) \leq \mathbb{E} \left(\left(\left(\int_0^t |X_s|^{2m} ds \right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_0^t 1 ds \right)^{1-\frac{1}{m}} \right)^m \right).$$

□

Proposition 3.4.15:

Sei M ein stetiges, beschränktes Martingal, sodass $\langle M \rangle$ beschränkt ist, und τ eine Stoppzeit. Dann existieren Konstanten $B_m, C_m, C'_m > 0$, welche nur von m abhängen, sodass

$$\mathbb{E} (|M_\tau|^{2m}) \leq C'_m \mathbb{E} (\langle M \rangle_\tau^m) \quad \forall m > 0 \quad (3.27)$$

$$B_m \mathbb{E} (\langle M \rangle_\tau^m) \leq \mathbb{E} (|M_\tau|^{2m}) \quad \forall m \geq \frac{1}{2} \quad (3.28)$$

$$B_m \mathbb{E} (\langle M \rangle_\tau^m) \leq \mathbb{E} (|M_\tau^*|^{2m}) \leq C_m \mathbb{E} (\langle M \rangle_\tau^m) \quad \forall m \geq \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

wobei $M_t^* := \max_{s \leq t} |M_s|$.

Bemerkung:

Mit Hilfe von Lokalisation lässt sich zeigen, dass (3.27) und (3.29) auch für $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$. (3.28) gilt unter der Voraussetzung $\mathbb{E}(\langle M \rangle_\tau^m) < \infty$.

Satz 3.4.16 (Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung):

Sei $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, τ eine Stoppzeit und $m > 0$. Dann existieren Konstanten $k_m, K_m > 0$, welche nur von m abhängen, sodass

$$k_m \mathbb{E}(\langle M \rangle_\tau^m) \leq \mathbb{E}(|M_\tau^*|^{2m}) \leq K_m \mathbb{E}(\langle M \rangle_\tau^m).$$

Gilt auch $\mathbb{E} \sqrt{\langle M \rangle_a} < \infty$ für alle $a \in (0, \infty)$, so ist M ein Martingal.

Beweis von 3.4.15:

Definiere $Y_t := \delta + \varepsilon \langle M \rangle_t + M_t^2 = \delta + (1 + \varepsilon) \langle M \rangle_t + 2 \int_0^t M_s dM_s$ für $\delta > 0, \varepsilon \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} dY_t^m &= mY_t^{m-1}dY_t + \frac{1}{2}m(m-1)Y_t^{m-2}d\left\langle 2 \int_0^\cdot M_s dM_s \right\rangle_t \\ &= mY_t^{m-1}(1 + \varepsilon)d\langle M \rangle_t + mY_t^{m-1}2M_t dM_t + 2m(m-1)Y_t^{m-2}M_t^2 d\langle M \rangle_t, \end{aligned}$$

sodass

$$\mathbb{E}|Y_\tau|^m = \delta^m + m(1 + \varepsilon) \mathbb{E} \int_0^\tau Y_s^{m-1} d\langle M \rangle_s + 2m(m-1) \mathbb{E} \int_0^\tau Y_s^{m-2} M_s^2 d\langle M \rangle_s + 0$$

wobei $0 = 2m \mathbb{E} \int_0^\tau Y_s^{m-1} M_s dM_s$, da $Y_s, M_s, \langle M \rangle_s$ nach Voraussetzung beschränkt sind und es gilt $Y_s \geq \delta > 0$, sodass $\frac{1}{Y_s}$ beschränkt ist und damit letztlich $\int_0^\tau Y_s^{m-1} M_s dM_s$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist und die Behauptung aus dem Stopsatz folgt.

Fall 1: Obere Schranke (3.27) für $m \in (0, 1]$. to be added □

3.4.E. Darstellung eines stetigen Martingals mit Hilfe einer Brownschen Bewegung

Das Ziel ist eine Darstellung eines CLM als ein stochastisches Integral bezüglich einer Brownschen Bewegung. Beachte, dass die Filtrationen stets die üblichen Bedingungen erfüllen.

Bemerkung (Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraumes):

Sei X ein $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierter Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Angenommen wir benötigen eine Brownsche Bewegung, welche unabhängig von X ist, so benötigen wir einen größeren Wahrscheinlichkeitsraum. Sei B eine Brownsche Bewegung auf $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$ mit einer Filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)_t$, so definiere $\tilde{\Omega} := \Omega \times \hat{\Omega}$, $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{F} \otimes \hat{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \hat{\mathbb{P}}$ und $\tilde{\mathcal{G}}_t := \mathcal{F}_t \otimes \hat{\mathcal{F}}_t$.

Wir forcieren die üblichen Bedingungen mit Hilfe von

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_t &:= \cap_{s>t} \sigma(\mathcal{G}_s \cup \mathcal{N}) \\ \tilde{\mathcal{F}} &:= \sigma(\tilde{\mathcal{G}} \cup \mathcal{N})\end{aligned}$$

und erweitern X und B auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ mit der Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ mit Hilfe von

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t(\omega, \hat{\omega}) &= X_t(\omega) \\ \tilde{B}_t(\omega, \hat{\omega}) &= B_t(\hat{\omega}).\end{aligned}$$

Dann ist \tilde{B} eine Brownsche Bewegung, welche unabhängig von \tilde{X} ist. Wir schreiben X und B anstelle von \tilde{X} und \tilde{B} .

Bemerkung:

Sei W eine SBM, X ein messbarer, adaptierter Prozess mit $\mathbb{P}\left(\int_0^t X_s^2 ds < \infty\right) = 1$ für alle t . Dann definiert $\left(\int_0^t X_s dW_s\right)_t$ ein stetiges, lokales Martingal mit $\langle \int_0^t X_s dW_s \rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds$ f.s. Ferner ist $t \mapsto \langle \int_0^t X_s dW_s \rangle_t$ \mathbb{P} -f.s. absolut stetig.

Satz 3.4.17:

Sei $M = (M_t)_t = (M_t^1, \dots, M_t^d)_t$ ein auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -definierter, $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierter Prozess mit $(M_t^i)_t \in \mathcal{M}^{c,loc}$ für alle $i = 1, \dots, d$. Angenommen $t \mapsto \langle M^i, M^j \rangle_t$ ist f.s. absolut stetig. Dann existiert eine Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ eine Brownsche Bewegung $W = (W_t)_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)_t$ existiert, welche $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ -adaptiert ist, und es existiert ein $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -adaptierter $\mathbb{R}^{d \times d}$ -wertiger stochastischer Prozess $X = ((X_t^{i,k})_{i,k=1,\dots,d})_t$ mit $\tilde{\mathbb{P}}\left(\int_0^t (X_s^{i,j})^2 ds < \infty\right)$, welcher $\tilde{\mathbb{P}}$ -f.s. $M_t^i = \sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^{i,k} dW_s^k$ für alle $i = 1, \dots, d$ und $t \geq 0$ erfüllt, sodass gilt $\langle M^i, M^j \rangle_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^{i,k} X_s^{j,k} ds$.

Beweis:

Schritt 1: (Zufälliger und zeitabhängige) Drehung der Koordinaten

Definiere

$$\begin{aligned}Z_t^{i,j} &= Z_t^{j,i} := \frac{d}{dt} \langle M^i, M^j \rangle_t \\ &= \lim_n \left(\langle M^i, M^j \rangle_t - \langle M^i, M^j \rangle_{(t-1/n)^+} \right),\end{aligned}$$

was \mathbb{P} -f.s. für λ -f.a. t existiert. Definiere den matrixwertigen stochastischen Prozess $Z := (Z_t)_t = ((Z^{(i,j)})_{i,j=1,\dots,d})_t$. Z ist symmetrisch und progressiv messbar, d.h. $Z|_{[0,t] \times \Omega}$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -messbar. Z ist positiv semidefinit, denn

$$\langle \alpha, Z_t \alpha \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i Z_t^{i,j} \alpha_j = \frac{d}{dt} \left\langle \sum_i \alpha_i M^i \right\rangle_t \geq 0,$$

da die quadratische Variation nichtfallend ist. Für \mathbb{P} -f.a. ω und λ -f.a. t lässt sich Z_t diagonalisieren mit Hilfe einer orthogonalen Matrix $Q_t(\omega) := (q_t^{(i,j)}(\omega))_{i,j=1,\dots,d}$ (wobei $Q_t^{-1} = Q_t^T$ und $Q_t^{-1} Z_t Q_t = \Lambda_t$ mit der Diagonalmatrix $\Lambda_t = (\lambda_t^i \delta_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ und λ_t^i ist der i -te Eigenwert von Z_t).

Mit Hilfe eines geeigneten Algorithmus lässt sich herleiten, dass Q_t und Λ_t aus Z_t mit Hilfe von Borel-messbaren Transformationen gewonnen werden können. Also überträgt sich die progressive Messbarkeit von Z_t auf Q_t und Λ_t , d.h. auch $(Q_t)_t$ und $(\Lambda_t)_t$ sind progressiv messbar.

Für λ -f.a. t haben wir \mathbb{P} -f.s. für alle i, j

$$\sum_k q_t^{k,i} q_t^{k,j} = e_i^T Q_t^T Q_t e_j = \delta_{ij} = \sum_k q_t^{i,k} q_t^{j,k} \quad (*)$$

sowie

$$\sum_{k,l=1}^d q_t^{k,i} Z_t^{k,l} q_t^{l,j} = e_i^T Q_t^T Z_t Q_t e_j = \lambda_t^i \delta_{ij} \geq 0. \quad (**)$$

Einsetzen von $i = j$ in $(*)$ liefert $\sum_k |q_t^{k,i}|^2 = 1 \Rightarrow |q_t^{k,i}| \leq 1$, sodass gilt

$$\int_0^t (q_s^{k,i})^2 d\langle M^k \rangle_s \leq \int_0^t d\langle M^k \rangle_s = \langle M^k \rangle_t < \infty$$

für alle k . Definiere nun für jedes k das lokale Martingal

$$N_t^k := \sum_{j=1}^d \int_0^t q_s^{j,k} dM_s^j,$$

abkürzend: $N_t = \int_0^t Q_s^t dM_s$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \langle N^i, N^j \rangle_s &= \sum_{k,l} \int_0^t q_s^{k,i} q_s^{l,j} d\langle M^k, M^l \rangle_s \\ &= \sum_{k,l} \int_0^t q_s^{k,i} Z_s^{k,l} q_s^{l,j} ds \stackrel{**}{=} \delta_{ij} \int_0^t \lambda_s^i ds, \end{aligned}$$

woraus speziell für $i = j$ folgt

$$\langle N^i \rangle_t = \int_0^t \lambda_s^i ds < \infty.$$

Schritt 2: Darstellung des lokalen Martingals N^i als stochastisches Integral
 Sei B eine SBM, welche unabhängig von $(N_t)_t$ ist auf dem erweiterten W-Raum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$.
 Dann definiert

$$W_t^i := \int_0^t \mathbb{1}_{\{\lambda_s^i > 0\}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_s^i}} dN_s^i + \int_0^t \mathbb{1}_{\{\lambda_s^i = 0\}} dB_s^i$$

für jedes i ein stetiges, lokales Martingal, denn

$$\int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i > 0\}} \frac{1}{\lambda_s^i} d\langle N^i \rangle_s = \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i > 0\}} \frac{1}{\lambda_s^i} \lambda_s^i ds \leq t < \infty.$$

Ferner gilt für alle i, j und $t \geq 0$ wegen der Unabhängigkeit von B^i und N^j

$$\begin{aligned} \langle W^i, W^j \rangle_t &= \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i > 0\}} \lambda_{\{\lambda_s^j > 0\}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_s^i \lambda_s^j}} d\langle N^i, N^j \rangle_s \\ &\quad + \int_0^t \dots d\langle N^i, B^j \rangle_s + \int_0^t \dots d\langle B^i, N^j \rangle_s + \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i = 0\}} \lambda_{\{\lambda_s^j = 0\}} d\langle B^i, B^j \rangle_s \\ &= \delta_{ij} \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i > 0\}} \frac{1}{\lambda_s^i} \lambda_s^i ds + 0 + 0 + \delta_{ij} \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i = 0\}} ds \\ &= \delta_{ij} \int_0^t 1 ds = \delta_{ij} t \end{aligned}$$

und daher ist W eine Brownsche Bewegung nach Levys Charakterisierung. Beachte hierbei, dass

$$\begin{aligned} \int_0^t \sqrt{\lambda_s^i} dW_s^i &= \int_0^t \sqrt{\lambda_s^i} \lambda_{\{\lambda_s^i > 0\}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_s^i}} dN_s^i \\ &\quad + \int_0^t \underbrace{\sqrt{\lambda_s^i} \lambda_{\{\lambda_s^i = 0\}}}_{=0} dB_s^i = \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i > 0\}} dN_s^i = N_t^i \end{aligned}$$

fast sicher gilt, denn

$$\left\langle \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i = 0\}} dN_s^i \right\rangle_t = \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i = 0\}} d\langle N^i \rangle_s = \int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i = 0\}} \lambda_s^i ds = 0.$$

Dies impliziert, dass das lokale Martingal $\left(\int_0^t \lambda_{\{\lambda_s^i = 0\}} dN_s^i\right)_t$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -f.s. verschwindet.

Schritt 3: Darstellung von M finden (Umkehrung der Rotation der Koordinaten)

Definiere $X_t^{i,k} := q_t^{i,k} \sqrt{\lambda_t^k}$. Es gilt wie oben

$$\int_0^t (X_s^{i,k})^2 ds = \int_0^t (q_t^{i,k})^2 \lambda_s^k ds = \int_0^t \lambda_s^k = \langle N \rangle_t < \infty,$$

d.h. X erfüllt die Integrierbarkeitsbedingung. Schließlich gilt noch

$$\begin{aligned}
\sum_k \int_0^t X_s^{i,k} dW_s^k &= \sum_k \int_0^t q_s^{i,k} \underbrace{\sqrt{\lambda_s^k} dW_s^k}_{=dN_s^k} \\
&= \sum_k \sum_j \int_0^t q_s^{i,k} q_s^{j,k} dM_s^j \\
&= \sum_{k,j} \int_0^t q_s^{i,k} q_s^{j,k} dM_s^j \\
&= \sum_j \int_0^t \delta_{ij} dM_s^j = \sum_j \delta_{ij} \int_0^t dM_s^j = M_t^i,
\end{aligned}$$

d.h. die Formel (4.2). □

Bemerkung:

Falls $(Z_t)_t$ \mathbb{P} -f.s. von konstantem Rank $r \in \{1, \dots, d\}$ für λ -f.a. t ist, dann lässt sich W leichter konstruieren: Man benötigt nicht den W -Raum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, denn wir können $\lambda_s^1, \dots, \lambda_s^r \geq 0$ annehmen. Ersetze dann W_t^i durch $W_t^i := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_s^i}} dN_s^i$ für $i \leq r$. Beachte hierbei, dass $N_t^i \equiv 0$ für $i > r$, denn $\langle N^i \rangle_t = \int_0^t \lambda_s^i ds$ und damit

$$\sum_{k=1}^r \int_0^t X_j^{i,k} dW_s^k = \sum_{k=1}^d \int_0^t q_s^{i,k} dN_s^k = \dots = N_t^i.$$

3.4.F. Stetige lokale Martingale als zeitgeschiftete Brownsche Bewegungen

Satz 3.4.18:

Sei $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$, welche den üblichen Bedingungen genügt. Angenommen $\langle M \rangle_t \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Definiere $\tau(s) := \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > s\}$. Dann ist $B_s = M_{\tau(s)}$ mit der Filtration $G_s := \mathcal{F}_{\tau(s)}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und es gilt $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$ für alle t \mathbb{P} -f.s. und $(G_s)_s$ genügt den üblichen Bedingungen.

Aufgabe 3.4.19:

Sei $A = (A_t)_t$ eine stetige, nichtfallende Funktion mit $A(0) = 0$. Angenommen $A(\infty) = S := \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ existiert. Definiere

$$\tau(s) := \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : A(t) > s\} & 0 \leq s < A(\infty) \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann hat τ als Funktion von s die Eigenschaften

- i) τ ist nichtfallend und rechtsstetig auf $[0, A(\infty))$ mit Werten in $[0, \infty)$.
- ii) $A(\tau(s)) = s \wedge A(\infty)$ für alle $s \in [0, \infty)$.
- iii) $\tau(A(t)) = \sup\{u \geq t : A(u) = A(t)\}$ für alle $t \geq 0$.
- iv) Sei $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit der folgenden Eigenschaft: Falls für $0 \leq t_1 < t$ $A(t_1) = A(t)$ gilt, so folgt $\varphi(t_1) = \varphi(t)$. Für solche Funktionen φ ist $s \mapsto \varphi(\tau(s))$ stetig auf $[0, A(\infty))$ und $\varphi(\tau(A(t))) = \varphi(t)$ für alle $t \in [0, \infty)$.
- v) Für $s, t \in [0, \infty)$ gilt: $s < A(t) \Leftrightarrow \tau(s) < t$ und $\tau(s) \leq t \Rightarrow s \leq A(t)$.
- vi) Sei G eine beschränkte, messbare, reellwertige Funktion (oder $G \geq 0$, messbar, $[0, \infty]$ -wertig) auf $[a, b] \subset [0, \infty)$. Dann gilt $\int_a^b G(t) dA(t) = \int_{A(a)}^{A(b)} G(\tau(s)) ds$.

Beweis:

ii): Für $s \geq A(\infty)$ ist dies klar. Sei $s < A(\infty)$ und setze $t := \tau(s)$ und nehme an $t > 0$. Für $\varepsilon \in (0, t)$ gilt $s \geq A(t - \varepsilon)$, sodass mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt $A(t) = A(\tau(s))$ ($\Rightarrow A(\tau(s)) \leq s$). Falls $t = \tau(s) = 0$, ist dies auch klar.

Für $\varepsilon > 0$ haben wir $s < A(t + \varepsilon)$, sodass mit $\varepsilon \downarrow 0$ gilt $A(t) = A(\tau(s))$ ($\Rightarrow A(\tau(s)) \geq s$).

iv): Idee: Dass $\varphi \circ T$ rechtsstetig ist, ist klar. Dass es linksstetig ist, erfordert Arbeit. Um zu zeigen, dass $\varphi \circ T \circ A = \varphi$, wende Teil (ii) an: $(A \circ \tau)(A(t)) = s \wedge A(\infty) = A(t) \wedge A(\infty) = A(t)$, sodass nach Voraussetzung gilt $\varphi(\underbrace{\tau(A(t))}_{=t_1}) = \varphi(t_1) = \varphi(t)$. vi): Beginne mit

$G(t) = \mathbb{1}_{[t_1, t_2)}(t)$ mit $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Nach (v) gilt $t_1 \leq \tau(s) < t_2 \Leftrightarrow A(t_1) \leq s < A(t_2)$.

Also gilt $\int_a^b G(t) dA(t) = A(t_2) - A(t_1) = \int_{A(t_1)}^{A(t_2)} G(\tau(s)) ds$. Benutze das Dynkin-System Argument, um die Behauptung zu zeigen. \square

Beweis von Satz 3.4.18:

Schritt 1: Zufallszeiten und Filtrationen

Nach Problem 4.5 in [KS10] ist $\{\tau(s) < t\} = \{\langle M \rangle_t > s\} \in \mathcal{F}_t$. Also ist $\tau(s)$ eine

Optionszeit und wegen der Rechtsstetigkeit von \mathcal{F}_t auch eine Stoppzeit. Dass $(G_s)_s$ die üblichen Bedingungen erfüllt, wird in einem Spezialfall in den Übungen gezeigt. Für festes t ist $\langle M \rangle_t$ eine Stoppzeit zu $(G_s)_s$, denn

$$\{\langle M \rangle_t > s\} = \{\tau(s) < t\} \in \mathcal{F}_{\tau(s)} = G_s.$$

2. Schritt: $B \in \mathcal{M}_2$

Sei $0 \leq s_1 < s_2$. Definiere $\tilde{M}_t := M_{t \wedge \tau(s_2)}$ - dies ist ein Martingal mit

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \tau(s_2)} \leq \langle M \rangle_{\tau(s_2)} = s_2 \wedge A(\infty) = s_2,$$

wobei $A(\infty) = \infty$ nach Voraussetzung. Nach Problem 1.5.24 (siehe Übungen) sind \tilde{M} und $\tilde{M}^2 - \langle \tilde{M} \rangle$ gleichgradig integrierbar. Also können wir das OST anwenden, sodass \mathbb{P} -f.s. gilt

$$\mathbb{E}(B_{s_2} - B_{s_1} \mid G_{s_1}) = \mathbb{E}(\tilde{M}_{\tau(s_2)} - \tilde{M}_{\tau(s_1)} \mid \mathcal{F}_{\tau(s_1)}) = 0$$

wegen der Martingaleigenschaft von \tilde{M} sowie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_{s_2} - B_{s_1})^2 \mid G_{s_1}) &= \mathbb{E}\left(\left(\tilde{M}_{\tau(s_2)} - \tilde{M}_{\tau(s_1)}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{\tau(s_1)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\langle M \rangle_{\tau(s_2) \wedge \tau(s_2)} - \langle M \rangle_{\tau(s_1) \wedge \tau(s_2)} \mid \mathcal{F}_{\tau(s_1)}\right) \\ &= s_2 - s_1. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass B ein quadratintegrierbares Martingal mit $\langle B \rangle_t = t$ ist. Wenn wir noch zeigen, dass B stetige Pfade hat, dann ist B nach Levys Charakterisierung eine Brownsche Bewegung.

Schritt 3: Stetigkeit der Pfade von B

Wir wollen Teil *iv*) der letzten Aufgabe nutzen. Um dies zu tun, müssen wir zeigen, dass eine Menge $\Omega^* \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ existiert, sodass aus $\omega \in \Omega^*$ $\langle M \rangle_{t_1}(\omega) = \langle M \rangle_t(\omega)$ für $0 \leq t_1 < t$ $M_{t_1}(\omega) = M_t(\omega)$ folgt. (Dabei ist $A(t) := \langle M \rangle_t(\omega)$, $\varphi(t) := M_t(\omega)$)

Es genügt ferner, $t_1 \in \mathbb{Q}$ zu betrachten, da M und $\langle M \rangle$ stetig sind. Zu festem $t_1 \in \mathbb{Q}$ definiere

$$\sigma := \inf\{t > t_1 : \langle M \rangle_t = \langle M \rangle_{t_1}\}$$

und $N_s := M_{(\tau_1+s) \wedge \sigma} - M_{t_1}$ für $s \geq 0$. Dann ist $(N_s)_s \in \mathcal{M}^{c,loc}$, adaptiert an $(\mathcal{F}_{t_1+s})_s$ und es gilt $\langle N \rangle_s = \langle M \rangle_{(t_1+s) \wedge \sigma} - \langle M \rangle_{t_1} = 0$ \mathbb{P} -f.s. (≤ 0 nach Definition von σ , \geq ist immer Wahr).

Nach Problem 5.12 gilt $N_s \equiv 0$ für alle s \mathbb{P} -f.s. Also existiert $\Omega(t_1)$ mit $\mathbb{P}(\Omega(t_1)) = 1$, sodass auf $\Omega(t_1)$ $M_{(t_1+s) \wedge \sigma} = M_{t_1}$ für alle $s \geq 0$ gilt.

Sei $t > t_1$ mit $\langle M \rangle_t = \langle M \rangle_{t_1}$. Setze $s := t - t_1$. Nach Definition von σ wissen wir $t = t_1 + s \leq \sigma$. Also gilt $M_t = M_{(t_1+s) \wedge \sigma} = M_{t_1}$ auf $\Omega(t_1)$. Setze nun $\Omega^* = \bigcap_{t_1 \in \mathbb{Q}, t_1 \geq 0} \Omega(t_1)$, so gilt nach Aufgabe 4.5(*iv*), dass $s \mapsto M_{\tau(s)}(\omega) = B_s$ stetig ist.

Schritt 4: Zeige $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$

Nach Aufgabe 4.5 gilt

$$M_s(\omega) = \varphi(t) = \varphi(\tau(\langle M \rangle_t)) = M_{\tau(\langle M \rangle_t)} = M_{\tau(s)} = B_s = B_{\langle M \rangle_t}.$$

□

Bemerkung:

Falls die Annahme $\langle M \rangle_t \rightarrow \infty$ nicht gilt, d.h. $\mathbb{P}(\lim_t \langle M \rangle_t < \infty) > 0$, so lässt sich immer noch eine Brownsche Bewegung finden, sodass $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$. Dazu nutze die verallgemeinerte Zeitänderung aus Problem 4.5.

Satz 3.4.20 (Zufälliger Zeitshift für stochastische Integrale):

Sei $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $\langle M \rangle_t \rightarrow \infty$, $\tau(s) := \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > s\}$. Sei X ein progressiv messbarer Prozess mit $\mathbb{P}(\int_0^\infty X_t^2 d\langle M \rangle_t < \infty) = 1$. Dann ist $Y_s := X_{\tau(s)}$ ein $(G_s)_s$ -adaptierter Prozess und es gilt \mathbb{P} -f.s.

i) $\int_0^\infty Y_s^2 ds < \infty$

ii) $\int_0^t X_s dM_s = \int_0^{\langle M \rangle_t} Y_s dB_s$

iii) $\int_0^{\tau(s)} X_s dM_s = \int_0^s Y_s dB_s$.

3.5. Girsanov-Theorem und Cameron-Martin-Formel

3.5.A. Grundlegendes Resultat

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$, welche die üblichen Bedingungen erfüllt, W eine d -dimensionale SBM auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und X ein adaptierter, messbarer, \mathbb{R}^d -wertiger Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Angenommen $\mathbb{P}\left(\int_0^T (X_t^i)^2 dt < \infty\right) = 1$ für alle i und $T \geq 0$. Dann ist $I^{W^i}(X^i) = \left(\int_0^t X_s^i dW_s^i\right)_t$ wohldefiniert und ein stetiges, lokales Martingal. Definiere nun

$$Z_t(X) = \exp\left(\sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^i dW_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_s\|^2 ds\right).$$

Dann zeigt Itô's Formel, dass $dZ_t(X) = \sum_{i=1}^d Z_t(X) X_t^i dW_t^i$ mit $Z_0 = 1$. Also ist $Z(X) \in \mathcal{M}^{c,loc}$ mit $Z_0(X) = 1$. Angenommen $Z(X)$ ist ein Martingal. Definiere für ein festes $T > 0$ das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{P}}_T$ auf $\tilde{\mathcal{F}}_T$ vermöge

$$\tilde{\mathbb{P}}_T(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z_T(X)) \quad \forall A \in \mathcal{F}_T.$$

Beachte hierbei, dass wir nun zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsräume haben: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit dem Erwartungswert \mathbb{E} und $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$ mit Erwartungswert $\tilde{\mathbb{E}}_T$.

Für $t \leq T$ haben wir die Konsistenz: für alle $A \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_T$ gilt

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z_t(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(Z_T(X) | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z_T(X)) = \tilde{\mathbb{P}}_T(A).$$

Satz 3.5.1 (Girsanov-Theorem):

Angenommen $Z(X)$ ist ein Martingal. Definiere $\tilde{W}_t^i := W_t^i - \int_0^t X_s^i ds$ für alle i , $t \geq 0$. Dann ist für jedes feste $T > 0$ $(\tilde{W}_t^i)_{t \leq T}$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$, adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_t$.

Lemma 3.5.2:

Sei $T \geq 0$, $0 \leq s \leq t \leq T$. Angenommen $Z(X)$ ist ein Martingal und Y eine \mathcal{F}_t -messbare Zufallsgröße mit $Y \in \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbb{P}}_T)$. Dann gilt die Bayessche Regel

$$\tilde{\mathbb{E}}_T(Y | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s(X)} \mathbb{E}(Y Z_t(X) | \mathcal{F}_s)$$

\mathbb{P} -f.s. und $\tilde{\mathbb{P}}_T$ -f.s.

Beweis:

Sei $A \in \mathcal{F}_s$. Nachrechnen ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_T\left(\mathbb{1}_A \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}(Y Z_t | \mathcal{F}_s)\right) &= \mathbb{E}\left(Z_T \mathbb{1}_A \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}(Y Z_t | \mathcal{F}_s)\right) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(Y Z_t | \mathcal{F}_s)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y Z_t) = \tilde{\mathbb{E}}_T(\mathbb{1}_A Y) = \tilde{\mathbb{E}}_T(\mathbb{1}_A Y). \end{aligned}$$

□

Notation:

Bezeichne mit $M_T^{c,loc}$ die Klasse der stetigen, lokalen Martingale $(M_t)_{t \leq T}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(M_0 = 0) = 1$ sowie mit $\tilde{M}_T^{c,loc}$ diejenigen definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$ mit $\tilde{\mathbb{P}}_T(M_0 = 0) = 1$.

Proposition 3.5.3:

Sei $T \geq 0$ und sei $Z(X)$ ein Martingal. Für $M, N \in \mathcal{M}_T^{c,loc}$ definiere

$$\begin{aligned}\tilde{M}_t &:= M_t - \sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^i d \langle M, W^i \rangle_s \\ \tilde{N}_t &:= N_t - \sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^i d \langle N, W^i \rangle_s.\end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$ und $\tilde{N} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$ mit $\langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle_t^{\tilde{\mathbb{P}}_T} = \langle M, N \rangle_t^{\mathbb{P}}$.

Beweis:

Schritt 1: Nach Lokalisierung können wir annehmen, dass M, N beschränkte Martingale sind, $\langle M \rangle, \langle N \rangle$ beschränkt sind, $Z_t(\omega)$ beschränkt in (t, ω) ist und $\sum_{j=1}^d \int_0^t (X_j^i)^2(\omega) ds$ ebenfalls beschränkt in (t, ω) ist.

Schritt 2: \tilde{M} ist beschränkt, denn mit Hilfe von Kunita-Watanabe gilt

$$\left| \int_0^t X_s^i d \langle M, W^i \rangle_s \right|^2 \leq \left| \int_0^t 1 \cdot |X_j^i| |d\xi_s^i| \right|^2 \leq \langle M \rangle_t \int_0^t |X_s^i|^2 d \langle W^i \rangle_s,$$

wobei ξ_s^i die Totalvariation von $\langle M, W^i \rangle$ bezeichne. Mit Hilfe von Schritt 1 folgt die Beschränktheit von \tilde{M} . **Schritt 3:** Mit Hilfe von partieller Integration (vergleiche Itô's Formel und Problem 3.12) gilt

$$\begin{aligned}d(Z_t \tilde{M}_t) &= Z_t d\tilde{M}_t + \tilde{M}_t dZ_t + d \langle Z, M \rangle \\ &= Z_t dM_t - \sum_i Z_t X_t^i d \langle M, W^i \rangle_t + \tilde{M}_t \sum_i Z_t X_t^i dW_t^i + \sum_i Z_t X_t^i d \langle W^i, M \rangle_t,\end{aligned}$$

d.h. $d(Z_t \tilde{M}_t) = Z_t dM_t + \sum_i \tilde{M}_t Z_t X_t^i dW_t^i$. Also ist $(Z_t \tilde{M}_t)_t$ ein \mathbb{P} -Martingal. Also folgt mit Hilfe des obigen Lemmas

$$\tilde{\mathbb{E}}_T(\tilde{M}_t | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}(\tilde{M}_t Z_t | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s} \tilde{M}_s Z_s = \tilde{M}_s$$

\mathbb{P} und $\tilde{\mathbb{P}}_T$ -fast sicher. Also ist \tilde{M} ein $\tilde{\mathbb{P}}_T$ -Martingal (bzw. lokales Martingal ohne Lokalisierung).

Schritt 4:

Nutze erneut die partielle Integration, so gilt

$$\begin{aligned}d(\tilde{M}_t \tilde{N}_t) &= \tilde{M}_t d\tilde{N}_t + \tilde{N}_t d\tilde{M}_t + d \langle M, N \rangle_t^{\mathbb{P}} \\ &= \tilde{M}_t dN_t - \sum_{i=1}^d \tilde{M}_t X_t^i d \langle N, W^i \rangle_t + \tilde{N}_t - \sum_{i=1}^d \tilde{N}_t X_t^i d \langle M, W^i \rangle_t + d \langle M, N \rangle_t.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
d(Z_t (\tilde{M}_t \tilde{N}_t - \langle M, N \rangle_t)) &= Z_t d[\dots] + [\dots] dZ_t + d\langle Z, \text{MG-Anteil von } [\dots] \rangle_t \\
&= Z_t \tilde{M}_t dN_t - Z_t \tilde{M}_t \sum_{i=1}^d X_t^i d\langle N, W^i \rangle_t + Z_t \tilde{N}_t dM_t \\
&\quad - Z_t \tilde{N}_t \sum_{i=1}^d X_t^i d\langle M, W^i \rangle_t + [\tilde{M}_t \tilde{N}_t - \langle M, N \rangle_t] Z_t \sum_{i=1}^d X_t^i dW_t^i \\
&\quad + \sum_{i=1}^d Z_t X_t^i \tilde{M}_t d\langle W^i, N \rangle_t + \sum_{i=1}^d Z_t X_t^i \tilde{N}_t d\langle W^i, M \rangle_t \\
&= Z_t \tilde{M}_t dN_t + Z_t \tilde{N}_t dM_t + [\dots] Z_t \sum_{i=1}^d X_t^i dW_t^i.
\end{aligned}$$

Also ist $(Z_t [\dots])_t$ ein \mathbb{P} -Martingal (vgl. Schritt 1). Daraus folgt wegen $Y := \tilde{M}_t \tilde{N}_t - \langle M, N \rangle_t \in \mathcal{F}_t$ und Lemma 5.3

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_T (\tilde{M}_t \tilde{N}_t - \langle M, N \rangle_t \mid \mathcal{F}_s) &= \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}_P \left((\tilde{M}_t \tilde{N}_t - \langle M, N \rangle_t) Z_t \mid \mathcal{F}_s \right) \\
&= \frac{1}{Z_s} (\tilde{M}_s \tilde{N}_s - \langle M, N \rangle_s) Z_s,
\end{aligned}$$

\mathbb{P} -f.s. und $\tilde{\mathbb{P}}_T$, sodass $(\tilde{M}_t \tilde{N}_t - \langle M, N \rangle_t)_t$ ein $\tilde{\mathbb{P}}_T$ -Martingal ist. Nach der Eindeutigkeit des Kovariationsprozesses folgt die letzte Behauptung. \square

Beweis vom Girsanov-Theorem:

Es ist zu zeigen, dass \tilde{W} die Bedingungen von Levys Charakterisierung erfüllt. \tilde{W} ist stetig und adaptiert und es gilt $\tilde{W}^j \in \tilde{\mathcal{M}}^{c,loc}$, denn nach Proposition 5.4 mit $M = W^j$ gilt $\tilde{W}_t^j = W_t^j - \sum_i \int_0^t X_s^i d\langle W^j, W^i \rangle_s = W_t^j - \int_0^t X_s^j ds \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$ und nach der selben Proposition gilt $\langle \tilde{W}^j, \tilde{W}^k \rangle_t = \langle W^j, W^k \rangle_t = \delta_{jk} \cdot t$. \square

Proposition 3.5.4:

Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.1 gilt für jedes $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$, dass ein $M \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$ existiert mit $\tilde{M}_t = M_t - \sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^i d\langle M, W^i \rangle_s$.

Beweis:

Sei zunächst \tilde{M} ein $\tilde{\mathbb{P}}_T$ -Martingal. Dann gilt nach Lemma 5.3

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} (Z_t \tilde{M}_t \mid \mathcal{F}_s) = Z_s \tilde{\mathbb{E}}_T (\tilde{M}_t \mid \mathcal{F}_s) = Z_s \tilde{M}_s$$

\mathbb{P} -f.s. und $\tilde{\mathbb{P}}_T$ -f.s. Also ist $Z(X)\tilde{M}$ ein \mathbb{P} -Martingal. Nach Lokalisierung folgt $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc} \Rightarrow Z(X)\tilde{M} \in \mathcal{M}_T^{c,loc}$. Schreibe $\tilde{M}_t = \frac{Z_t \tilde{M}_t}{Z_t}$, so ist dies der Quotient von einem Element aus $\mathcal{M}_T^{c,loc}$ und einem \mathbb{P} -Martingal. Itô's Formel zeigt, dass \tilde{M} ein stetiges Semimartingal bezüglich \mathbb{P} ist, d.h. $\tilde{M}_t = M_t + B_t$ mit $(M_t)_t \in \mathcal{M}_T^{c,loc}$ und B eine

Differenz zweier stetiger, nichtfallender, adaptierter Prozesse mit $B_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s.
Nun ist $\tilde{M}_t - (M_t - \sum_i \int_0^t X_s^i d\langle M, W^i \rangle_s)$ eine Differenz zweier Elemente aus $\tilde{M}_T^{c,loc}$,
allerdings auch $= B_t + \sum_i \int_0^t X_s^i d\langle M, W^i \rangle_s$, d.h. von beschränkter Variation. Also ist das
lokale Martingal konstant 0. \square

Beim Girsanov-Theorem haben wir stets einen endlichen Zeithorizont betrachtet. Was
passiert, wenn wir auf $[0, \infty)$ arbeiten müssen? Wir benötigen ein Maß auf $\tilde{\mathbb{P}}$ auf $\mathcal{F}_\infty :=$
 $\sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ statt auf \mathcal{F}_T mit $T > 0$. Im Allgemeinen existiert keine konsistente Familie
 $(\tilde{\mathbb{P}}_T)_T$.

Sei nun $\Omega := \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_\infty^W$. Definiere $\tilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}_\mathbb{P}(\mathbb{1}_A Z_T(X))$ für $A \in \mathcal{F}_T \forall T \geq$
 0 . Falls $\tilde{\mathbb{P}}$ existiert, ist es durch diese Festlegung eindeutig bestimmt. Betrachte den
Koordinatenprozess $W_t(\omega) := \omega(t)$ auf $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d)) = \mathcal{F}_\infty^W$ mit dem Wiener-
Maß \mathbb{P} . Definiere $\tilde{\mathbb{P}}_T$ wie oben. Dann ist $\{\tilde{\mathbb{P}}_T : T \geq 0\}$ eine konsistente Familie, sodass
wir $\tilde{\mathbb{P}}$ auf $\bigcup_{T \geq 0} \mathcal{F}_T^W$ definieren können. Es lässt sich zeigen, dass die Festlegung $\tilde{\mathbb{P}}(A) =$
 $\tilde{\mathbb{P}}_T(A) \forall A \in \mathcal{F}_T^W \forall T \geq 0$ eine σ -additive Funktion festlegt (vgl. Parthasarathy, Probability
measures on metric spaces, Theorem 4.2). Mittels Caratheodory lässt sich zeigen, dass
eine Erweiterung von $\tilde{\mathbb{P}}$ auf \mathcal{F}_∞^W existiert.

Hierbei treten allerdings Schwierigkeiten mit der Messbarkeit auf. \tilde{W} und $(\int_0^t X_s^i ds)_t$ sind
 $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert (wobei X \mathcal{F}_t -adaptiert ist). In Lemma 2.4 haben wir benötigt, dass die
Filtration vollständig war, um zu zeigen, dass $(\int_0^t X_s^i ds)_t$ adaptiert ist.

Das Problem hierbei ist, dass $(\mathcal{F}_t^W)_t$ nicht die üblichen Bedingungen erfüllt.

Korollar 3.5.5:

Sei W die kanonische Brownsche Bewegung, X ein \mathbb{R}^d -wertiger, progressiv messbarer
Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t^W)_t$ mit $\mathbb{P}(\int_0^T (X_s^i)^2 ds < \infty) = 1 \forall i$ und $T \geq 0$. Dann gilt: Ist $Z(X)$ ein
Martingal, dann existiert ein eindeutiges Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ mit

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(\mathbb{1}_A Z_T(X))$$

für alle $A \in \mathcal{F}_T^W$ und $T \geq 0$ und \tilde{W} definiert wie in Theorem 5.1 ist eine SBM auf
 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^W, \tilde{\mathbb{P}})$.

Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen des obigen Korollars sind $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T^W}$ und $\tilde{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T^W}$ äquivalent. Dies
gilt nicht für die Maße \mathbb{P} und $\tilde{\mathbb{P}}$, außer unter der Voraussetzung, dass $Z(X)$ gleichgradig
integrierbar ist.

3.5.B. Brownsche Bewegung mit Drift

Gegeben sei eine Brownsche Bewegung W und ein Niveau $b \neq 0$. Definiere die Erstdurchgangszeit $\tau_b := \inf\{t \geq 0 : W_t = b\}$. Nach Bemerkung 2.8.3 hat τ_b die Dichte $\frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{2t}} \mathbb{1}_{\{t>0\}}$ und die Momentenerzeugende Funktion $\mathbb{E} e^{\alpha\tau_b} = e^{-|b|\sqrt{2\alpha}}$ für $\alpha > 0$. Korollar 5.2 zeigt, dass für $\mu \neq 0$ ist $\tilde{W}_t = W_t - \mu t$ eine \mathbb{P}^μ -Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathcal{F}_t^W)_t$, wobei $\mathbb{P}^\mu(A) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z_t)$ für alle $A \in \mathcal{F}_t^W$ und $t \geq 0$ mit $Z_t = \exp\left(\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$. Auf $\{\tau_b \leq t\} \in \mathcal{F}_t^W \cap \mathcal{F}_{\tau_b}^W$ gilt $Z_{t \wedge \tau_b} = Z_{\tau_b}$ und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\mu(\tau_b \leq t) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau_b \leq t\}} Z_t) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau_b \leq t\}} \mathbb{E}(Z_t \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau_b}^W)) \stackrel{OST}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau_b \leq t\}} Z_{\tau_b}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau_b \leq t\}} e^{\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 \tau_b}) = \int_0^t e^{\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 s} \mathbb{P}_{\tau_b}^{\mu}(ds). \end{aligned}$$

Daraus folgt erstens, dass unter Ausnutzung der Dichte von $\mathbb{P}_{\tau_b}^{\mu}$ sich die Dichte von $\mathbb{P}_{\tau_b}^{\mu}$ berechnen lässt zu

$$\mathbb{P}^\mu(\tau_b \in dt) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{t}} - \mu\sqrt{t}\right)^2} dt$$

und zweitens die Tatsache

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\mu(\tau_b < \infty) &= \int_0^\infty e^{\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 s} \mathbb{P}_{\tau_b}^{\mu}(ds) = e^{\mu b} \mathbb{E}\left(e^{-\frac{1}{2}\mu^2 \tau_b}\right) \\ &= e^{\mu b} e^{-|b|\sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}\mu^2}} = e^{\mu b - |b\mu|}. \end{aligned}$$

Also erreicht W unter \mathbb{P}^μ das Level $b \neq 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1 dann und genau dann, wenn $\mu, b > 0$ oder $\mu, b < 0$. Ansonsten ist die Dichte $\mathbb{P}_{\tau_b}^{\mu}$ „defekt“.

3.5.C. Novikov-Bedingung

Wann ist $Z(X)$ ein Martingal, wobei $Z_t = \exp\left(\underbrace{\mu \int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2}\mu^2 \int_0^t X_s^2 ds}_{=M_t}\right)$. Wir wissen,

dass Z ein lokales Martingal ist. Denn mit Hilfe der Stoppzeiten $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \max_{1 \leq i \leq d} \int_0^t |Z_s X_s^i|^2 ds = n\}$ ist $Z_t^n := Z_{t \wedge \tau_n}$ ein Martingal.

Mit Hilfe des Lemma von Fatou ist Z immer ein Supermartingal, denn für $0 \leq s \leq t$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left(\liminf_n Z_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s) \\ &= \liminf_n Z_{s \wedge \tau_n} = Z_s. \end{aligned}$$

Ein Supermartingal ist jedoch genau dann ein Martingal, wenn der Erwartungswert konstant ist. Also ist Z genau dann ein Martingal, wenn $\mathbb{E} Z_t = \mathbb{E} Z_0 = 1$ für alle t gilt.

Proposition 3.5.6:

Sei $M \in \mathcal{M}^{loc,c}$ und $Z_t = e^{M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t}$. Gilt $\mathbb{E} e^{\frac{1}{2}\langle M \rangle_t} < \infty$, so folgt $\mathbb{E} Z_t = 1$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3.5.7 (Wald-Identität):

Ist τ eine $(\mathcal{F}_t^W)_t$ -Stoppzeit mit $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Dann gilt $\mathbb{E} e^{\mu W_\tau - \frac{1}{2}\mu^2 \tau} = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}^\mu(\tau < \infty) = 1$.

Beweis:

Übung. □

Beweis der Proposition:

Schritt 1: Definiere $\tau(s) := \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > s\}$. Dann ist $B_s := M_{\tau(s)}$ zusammen mit $G_s := \mathcal{F}_{\tau(s)}$ eine Brownsche Bewegung. Definiere $\sigma_b := \inf\{s \geq 0 : B_s - s = b\}$ für $b < 0$. Wir wollen zeigen, dass die Wald-Identität mit $\mu = 1$ anwendbar ist. Dazu:

$$\mathbb{P}^1(\sigma_b < \infty) = \mathbb{P}^1\left(\exists s < \infty : \underbrace{B_s - \mu s}_{\tilde{B}_s} = b\right) = \mathbb{P}(\exists s < \infty : W_s = b) = 1.$$

Also gilt nach Wald-Identität:

$$1 = \mathbb{E} e^{\mu B_{\sigma_b} - \frac{1}{2}\mu^2 \sigma_b} = \mathbb{E} e^{(\sigma_b + b) - \frac{1}{2}\sigma_b} = \mathbb{E} e^{\frac{1}{2}\sigma_b} e^b,$$

d.h. $\mathbb{E} e^{\frac{1}{2}\sigma_b} = e^{-b}$.

Schritt 2: Definiere den Hilfsprozess $Y_s := e^{B_s - \frac{1}{2}s}$. Dann ist $N_s := Y_{s \wedge \sigma_b}$ ein $(G_s)_s$ -Martingal. Mit $\mu = -1$ und $b < 0$ gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}^{-1}(\tau_b < \infty) = \mathbb{P}^{-1}(\exists s < \infty : B_s = b) = \mathbb{P}^{-1}(\exists s < \infty : B_s - \mu s - s = b) \\ &= \mathbb{P}(\exists s < \infty : B_s - s = b), \end{aligned}$$

woraus $1 = \mathbb{P}(\sigma_b < \infty)$ folgt. Dann gilt $N_\infty := \lim_{s \rightarrow \infty} N_s = \lim_{s \rightarrow \infty} Y_{\sigma_b} = e^{B_{\sigma_b} - \frac{1}{2}\sigma_b}$. Betrachte nun $N = (N_s)_{s \leq \infty}$ mit letztem Element N_∞ und wende das Lemma von Fatou

an, so ist N ein Supermartingal mit letztem Element. Also gilt wie oben $\mathbb{E} N_\infty = 1 = \mathbb{E} N_0$. Also ist $\mathbb{E} N_t = 1$ für alle t und damit $(N_s)_s$ ein Martingal.

Schritt 3: Für jede Stoppzeit R gilt nach dem OST (vgl. Definition von N_R)

$$\mathbb{E} e^{B_{R \wedge \sigma_B} - \frac{1}{2}(R \wedge \sigma_B)} = 1.$$

Wähle nun $R = \langle M \rangle_t$ für festes $t \geq 0$, so gilt unter Beachtung, dass $\langle M \rangle_t$ eine $(G_s)_s$ -Stoppzeit ist,

$$1 = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{\sigma_b \leq \langle M \rangle_t\}} e^{b + \frac{1}{2}\sigma_b} + \mathbb{1}_{\{\langle M \rangle_t < \sigma_b\}} e^{B_{\langle M \rangle_t} - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t} \right) \leq e^b e^{\frac{1}{2}\langle M \rangle_t},$$

sodass mit $b \rightarrow -\infty$ $e^b \rightarrow 0$ gilt. Ferner

$$1 = \lim_{b \rightarrow -\infty} \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{\langle M \rangle_t < \sigma_b\}} Z_t \right) = \mathbb{E} Z_t$$

wegen monotoner Konvergenz. □

Korollar 3.5.8 (Novikov-Bedingung):

Sei W eine d -dimensionale Brownsche Bewegung und X ein adaptierter, \mathbb{R}^d -wertiger, messbarer Prozess. Angenommen es gilt $\mathbb{P}(\int_0^T (X_t^i)^2 dt < \infty) = 1$ für alle i und $T \geq 0$.

Gilt $\mathbb{E} \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^T \|X_s\|^2 ds} \right) < \infty$ für alle $T \geq 0$, so ist

$$Z_t(X) := \exp \left(\sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^i dW_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_s\|^2 ds \right)$$

ein Martingal.

Beweis:

Wende die vorherige Proposition an mit $M_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^i dW_s^i$. □

Bemerkung:

Hierbei reicht die Annahme, dass eine Folge $t_n \uparrow \infty$ existiert, sodass

$$\mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|X_s\|^2 ds \right) < \infty$$

für alle $n \geq 1$.

Beweis:

Setze $X_t^n := X_t \mathbb{1}_{[t_{n-1}, t_n]}(t)$. Nach der Novikov-Bedingung ist $Z(X^n)$ ein Martingal für jedes n mit $\mathbb{E}(Z_{t_n}(X^n) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}) = Z_{t_{n-1}}(X^n) = 1$. Daraus folgt induktiv

$$\mathbb{E} Z_{t_n}(X) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} (Z_{t_n}(X) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}) \right) = \mathbb{E} (Z_{t_{n-1}} \underbrace{\mathbb{E}(Z_{t_n}(X^n) | \mathcal{F}_{t_{n-1}})}_{=1}) = \mathbb{E} Z_{t_{n-1}}(X) = 1.$$

Weil $Z(X)$ ein Supermartingal ist, ist $t \mapsto \mathbb{E} Z_t$ nichtfallend. Also gilt $\mathbb{E} Z_t = 1$ für alle t . □

Definition 3.5.9:

Sei $\Omega = \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ und $G_t := \sigma(f|_{[0,t]}: f \in \Omega)$, $G = G_\infty$. Ein progressiv messbares Funktional auf $\Omega = \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ ist eine Abbildung $\mu : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\mu|_{[0,t] \times \Omega}$ ist $\mathcal{B}([0, t]) \otimes G_t - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.

Bemerkung:

Sind μ^i progressiv messbare Funktionale für $i = 1, \dots, d$ und $\mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{pmatrix}$, so definiert

$X_t^i(\omega) := \mu^i(t, W(\omega))$ für alle t, i bzw. $X_t(\omega) := \mu(t, W(\omega))$ einen progressiv messbaren, stochastischen Prozess.

Korollar 3.5.10:

Seien μ und X wie oben. Angenommen für alle $T \geq 0$ existiert ein $K_T > 0$, sodass $\|\mu(t, f)\| \leq K_T(1 + f^*(t))$ für alle $t \in [0, T]$ mit $f^*(t) := \max_{s \leq t} \|f(s)\|$. Dann ist $Z(X)$ ein Martingal.

Beweis:

Ohne Beweis. □

Bemerkung 3.5.11 (Liptser-Shiryaev):

Für $d = 1$ existiert für jedes $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ ein stochastischer Prozess X , welcher den Bedingungen von Korollar 5.13 genügt, mit $\frac{1}{2}$ ersetzt durch $\frac{1}{2} - \varepsilon$, sodass $Z(X)$ kein Martingal ist.

4. Stochastische Differentialgleichungen

4.1. Starke Lösungen

Wir wollen der SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (*)$$

einen Sinn verleihen, bzw. komponentenweise $dX_t^i = b_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}(t, X_t)dW_t^j$ für $i = 1, \dots, d$, wobei W eine r -dimensionale Brownsche Bewegung und $b_i, \sigma_{ij} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar sind. Dabei heißt $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ Drift-Vektor, Drift oder Drift-Koeffizient und $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{dr}$ Diffusionskoeffizient. Definiere ferner $a(t, x) := \sigma(t, x)\sigma(t, x)^T$.

4.1.A. Definitionen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W -Raum mit einer Brownschen Bewegung W bzgl. $(\mathcal{F}_t^W)_t$ und einer \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariable ξ , welche unabhängig von W ist, d.h. ξ ist unabhängig von \mathcal{F}_∞^W . Sei $\mu = \mathbb{P} \xi^{-1}$ und $G_t := \sigma(\xi, W_s : 0 \leq s \leq t)$ für alle t und $\mathcal{N} := \{N \subset \Omega : \exists G \in G_\infty \text{ mit } N \subset G \text{ und } \mathbb{P}(G) = 0\}$, $\mathcal{F}_t := \sigma(G_t \cup \mathcal{N})$ und \mathcal{F}_∞ die augmentierte Filtration. Wir wissen, dass W eine $(G_t)_t$ -Brownsche Bewegung ist, d.h. auch eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -Brownsche Bewegung, wobei $(\mathcal{F}_t)_t$ die üblichen Bedingungen erfüllt (vgl. Satz 2.7.7).

Definition 4.1.1 (Starke Lösung):

Unter den obigen Konstruktionen heißt ein stochastischer Prozess X eine starke Lösung der SDE wenn gilt:

- i) X hat stetige Pfade.
- ii) X ist $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert.
- iii) $\mathbb{P}(X_0 = \xi) = 1$.
- iv) $\mathbb{P}\left(\int_0^t |b_i(s, X_s)| ds < \infty\right) = 1$ sowie $\mathbb{P}\left(\int_0^t |\sigma_{ij}(s, X_s)|^2 ds < \infty\right) = 1$ für alle i, j und t .
- v) $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ für alle $t \geq 0$ \mathbb{P} -fast sicher.

Bemerkung 4.1.2:

Die Bedingung, dass X $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert ist bedeutet, dass X_t nur von ξ und $(W_s)_{s \leq t}$ abhängt.

Definition 4.1.3 (Starke Eindeutigkeit):

Gegeben seien b, σ wie oben. Dann sagen wir, dass starke Eindeutigkeit für das Paar (b, σ) gilt, wenn für jede Brownsche Bewegung W und jede Startbedingung ξ für je zwei Lösungen X, \tilde{X} der SDE $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t \forall t) = 1$ für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer BM W , $(\mathcal{F}_t)_t$ wie oben und ξ unabhängig von \mathcal{F}_∞^W .

Vereinfacht sagen wir auch, dass starke Eindeutigkeit für die SDE (*) gilt.

Beispiel 4.1.4:

Sei $d = 1$. Für $dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t$ mit einer Borel-messbaren, beschränkten, in x nichtsteigenden Funktion $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt starke Eindeutigkeit.

Angenommen $X^i, i = 1, 2$ erfüllen $X_t^i = X_0 + \int_0^t b(s, X_s^i)ds + W_t$ für alle t und $i = 1, 2$. Es ist zu zeigen, dass $\Delta_t := X_t^1 - X_t^2 = \int_0^t (b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2)) ds = 0$. Dazu nutze Itô's Formel:

$$d\Delta_t^2 = 2\Delta_t d\Delta_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \underbrace{(d\Delta_t)^2}_{=0} = 2\Delta_t (b(t, X_t^1) - b(t, X_t^2)),$$

d.h. $\Delta_t^2 = 0 + 2 \int_0^t (X_s^1 - X_s^2) (b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2)) ds \leq 0$, d.h. $\Delta_t = 0$ \mathbb{P} -fast sicher.

4.2. Itô-Theorie

Im Falle eines deterministischen $\sigma \equiv 0$ entspricht die SDE (*) einer deterministischen Integralgleichung $X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s) ds$. Die Zufälligkeit ist nur durch ξ gegeben. Die klassischen Ergebnisse der Existenz und Eindeutigkeit für solche Integrale nutzen die Annahme einer lokalen Lipschitz-Stetigkeit von $x \mapsto b(t, x)$, gleichmäßig in t und eine Bedingung an das Wachstum in x , gleichmäßig in t . Dann lässt sich die Picard-Lindelöf-Iteration $X_t^0 := \xi$, $X_t^{k+1} := \xi + \int_0^t b(s, X_s^k) ds$ für $t \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ und es lässt sich Konvergenz gegen eine Lösung $(X_t)_t$ zeigen.

Dabei ist die lokale Lipschitz-Stetigkeit notwendig. Dazu sei $b(t, x) = |x|^\alpha$ für $\alpha \in (0, 1)$, $\xi = 0$. Dann ist die Lösung nicht eindeutig:

$$X_t^s := \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq s \\ \left(\frac{t-s}{\beta}\right)^\beta & s \leq t \end{cases}$$

mit $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$. Dass dies eine Lösung darstellt, lässt sich nachrechnen: Für $t \leq s$ gilt $X_t = 0 = \int_0^t X_r^s dr$ und für $t > s$ gilt $\int_0^t b(u, X_u) du = \int_0^t |X_u|^\alpha du = \int_s^t \left(\frac{u-s}{\beta}\right)^{\alpha\beta} du = \left(\frac{t-s}{\beta}\right)^\beta$.

Aufgabe 4.2.1 (Gronwall-Ungleichung):

Ist v differenzierbar auf $(0, \infty)$ und genügt $v'(t) \leq \beta(t)v(t)$ für $t > 0$, so gilt $v(t) \leq v(0)e^{\int_0^t \beta(s) ds}$.

Allerdings ist die Aussage mit einer differenzierbaren Funktion v zu restriktiv. Daher benötigen wir die folgende Version der Ungleichung: Ist g stetig mit $0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s) ds$ für $t \in [0, T]$ mit $\beta \geq 0$ und $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt $g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds$

Satz 4.2.2 (Eindeutigkeit unter lokaler Lipschitz-Stetigkeit):

Seien b, σ lokal Lipschitz-stetig in der Raumvariable, d.h. für alle $n \geq 1$ existiere ein $K_n > 0$, sodass für alle t und x, y mit $\|x\|, \|y\| \leq n$ gilt $\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K_n \|x - y\|$. Dann gilt für die SDE (*) die starke Eindeutigkeit.

Bemerkung 4.2.3:

Da alle Normen im \mathbb{R}^{dr} äquivalent sind, werden wir diejenige Norm auswählen, die am komfortabelsten ist: $\|\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}^2$ (euklidische Norm zum dr -Vektor).

Beweis:

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, W und ξ gegeben. Angenommen X und \tilde{X} erfüllen die SDE (*) für die gegebenen Startbedingungen. Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t \forall t \geq 0) = 1$. Da beide Prozesse per Definition stetig in t sind, genügt es, dies für festes $t \geq 0$ zu zeigen.

Definiere die Stoppzeiten $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \|X_t\| \geq n\}$ für $n \geq 1$ und analog $\tilde{\tau}_n$ sowie $\sigma_n := \tau_n \wedge \tilde{\tau}_n \rightarrow \infty$ \mathbb{P} -f.s.. Nun gilt

$$X_{t \wedge \sigma_n} - \tilde{X}_{t \wedge \sigma_n} = \int_0^{t \wedge \sigma_n} (b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u)) du + \int_0^{t \wedge \sigma_n} (\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \tilde{X}_u)) dW_u,$$

sodass folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| X_{t \wedge \sigma_n} - \tilde{X}_{t \wedge \sigma_n} \right\|^2 &\leq 2 \mathbb{E} \left(\left\| \int_0^{t \wedge \sigma_n} \left(b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u) \right) du \right\|^2 \right) \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \left(\left\| \int_0^{t \wedge \sigma_n} \left(\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \tilde{X}_u) \right) dW_u \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Betrachten wir den zweiten Summanden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left\| \int_0^{t \wedge \sigma_n} [\dots] dW_u \right\|^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^r \int_0^{t \wedge \sigma_n} (\sigma_{ij}(u, X_u) - \sigma_{ij}(u, \tilde{X}_u)) dW_u^j \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r \mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge \sigma_n} [\dots]^2 du \right) + 0 \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge \sigma_n} \left\| \sigma(u, X_u) - \sigma(u, \tilde{X}_u) \right\|^2 du \right) \end{aligned}$$

Dabei verschwinden die gemischten Terme, da die Einträge der Brownschen Bewegung unabhängig ist, d.h. $dW_u^j dW_u^k = 0$ für $j \neq k$. Mit Hilfe von Cauchy-Schwarz für den ersten Summanden folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left\| X_{t \wedge \sigma_n} - \tilde{X}_{t \wedge \sigma_n} \right\|^2 \right) &\leq 2T \mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge \sigma_n} \left\| b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u) \right\|^2 du \right) \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge \sigma_n} \left\| \sigma(u, X_u) - \sigma(u, \tilde{X}_u) \right\|^2 du \right) \\ &\leq 2(T+1)K_n^2 \mathbb{E} \left(\int_0^t \left\| X_u - \tilde{X}_u \right\|^2 du \right). \end{aligned}$$

Das Gronwall-Lemma mit $g(t) = \mathbb{E} \left(\left\| X_{t \wedge \sigma_n} - \tilde{X}_{t \wedge \sigma_n} \right\|^2 \right)$, $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta = 2(T+1)K_n^2 > 0$ folgt $g(t) \leq 0 + \beta \int_0^t 0 \cdot e^{\dots} ds = 0$. Also gilt $\mathbb{P} \left(X_{t \wedge \sigma_n} = \tilde{X}_{t \wedge \sigma_n} \right) = 1$ für alle t und damit aufgrund der Stetigkeit $\mathbb{P} \left(X_{t \wedge \sigma_n} = \tilde{X}_{t \wedge \sigma_n} \forall t \geq 0 \right) = 1$. Der Grenzwert $n \rightarrow \infty$ liefert die Behauptung. \square

Bemerkung 4.2.4:

Für gewöhnliche Differentialgleichung reicht die lokale Lipschitz-Bedingung nicht aus, um die Existenz einer globalen Lösung zu garantieren. Sei dazu $\xi = 1$ und $b(t, x) = x^2$. Solange eine Lösung $X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 ds$ existiert, ist die Lösung eindeutig (z.B. nach obigem Theorem). Die eindeutige Lösung ist $X_t = \frac{1}{1-t} \uparrow \infty$ für $t \rightarrow 1$.

Satz 4.2.5 (Existenz unter globaler Lipschitz-Bedingung und linearem Wachstum):

Angenommen es gibt ein $K > 0$ mit $\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K \|x - y\|$ für alle x, y und t und $\|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2)$. Sei ξ unabhängig von \mathcal{F}_∞^W mit $\mathbb{E} \|\xi\|^2 < \infty$. Dann existiert ein stetiger, $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierter stochastischer Prozess X ,

welcher eine starke Lösung der SDE (*) mit Anfangsbedingung ξ ist.
 Ferner ist X quadratintegrierbar und es existiert für alle $T > 0$ ein $C = C(K, T)$, sodass $\mathbb{E} \|X_t\|^2 \leq C(1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2)e^{Ct}$ für $t \in [0, T]$.

Beweis:

Die Idee ist eine Picard-Lindelöf-Iteration mit $X_t^0 := \xi$ und $X_t^{k+1} := \xi + \int_0^t b(s, X_s^k) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^k) dW_s$ für alle t .

Zunächst ist zu zeigen, dass die rechte Seite von X^{k+1} wohldefiniert ist. Dann folgt, dass $(X_t^n)_t$ stetig und $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert sind. \square

Aufgabe 4.2.6:

Für alle $T > 0$ existiert ein $C = C(K, T)$, sodass gilt:

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s^k\|^2 \right) \leq C(1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2)e^{Ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

Beweis:

Schritt 1: X_t^{k+1} ist wohldefiniert für jedes t und k . Dazu muss man zeigen, dass

$$\int_0^t \|b(s, X_s^k)\|^2 ds < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^t \|\sigma(s, X_s^k)\|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Wegen der Wachstumsbedingung gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t \|b(s, X_s^k)\|^2 ds &\leq Kt \int_0^t \frac{\sqrt{1 + \|X_s^k\|^2}}{t} ds \leq Kt \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t (1 + \|X_s^k\|^2) ds} \\ &= Kt \left(1 + \frac{1}{t} \int_0^t \|X_s^k\|^2 ds \right) \leq K \left(T + \int_0^t \|X_s^k\|^2 ds \right) < \infty. \end{aligned}$$

Also folgt die Aussage, wenn die obige Aufgabe gezeigt ist. Das selbe Argument gilt für σ .

Schritt 2: Wir zeigen die Aufgabe per Induktion. Für $k = 0$ gilt $\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^0\|^2 \right) = \mathbb{E} \|\xi\|^2 < \infty$ nach Voraussetzung. Für $k \rightarrow k + 1$ gilt

$$\|X_t^{k+1}\|^2 \leq 3 \|\xi\|^2 + 3 \underbrace{\left\| \int_0^t b(s, X_s^k) ds \right\|^2}_{\leq \frac{C \cdot T}{t} \int_0^t \|b(s, X_s^k)\|^2 ds} + 3 \left\| \int_0^t \sigma(s, X_s^k) dW_s \right\|^2,$$

sodass gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^{k+1}\|^2 \right) &\leq 3 \cdot \mathbb{E} \|\xi\|^2 + 3T \int_0^T \mathbb{E} \|b(s, X_s^k)\|^2 ds \\ &\quad + 3 \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t \sigma(s, X_s^k) dW_s \right\|^2 \right) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} 3 \mathbb{E} \|\xi\|^2 + 3K^2(T+k)(T + \int_0^T \mathbb{E} \|X_s^k\|^2 ds) \\ &\leq C(K, T)(1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2)(1 + CT + \dots + (CT)^{k+1}/(k+1)!) \\ &\leq C(1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2)e^{CT}, \end{aligned}$$

wobei in (*) Doobs Submartingalungleichung eingeht, denn $\left\| \int_0^t \sigma(s, X_s^k) dW_s \right\|^2$ ist ein Submartingal, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t \sigma(s, X_s^k) dW_s \right\|^2 \right) &\leq \left(\frac{2}{2-1} \right)^2 \mathbb{E} \left\| \int_0^T \sigma(s, X_s^k) dW_s \right\|^2 \\ &\leq 12 \int_0^T \left\| \sigma(s, X_s^k) \right\|^2 ds. \end{aligned}$$

□

Beweis:

Setze $X_t^{k+1} - X_t^k = I_t^1 + I_t^2$, wobei

$$I_t^1 = \int_0^t (b(s, X_s^{k+1}) - b(s, X_s^k)) ds \text{ und } I_t^2 = \int_0^t (\sigma(s, X_s^{k+1}) - \sigma(s, X_s^k)) dW_s,$$

so gilt

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \left\| I_s^1 \right\|^2 \right) \leq K^2 t \int_0^t \mathbb{E} \left(\left\| X_u^k - X_u^{k-1} \right\|^2 \right) du$$

sowie

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \left\| I_s^2 \right\|^2 \right) \leq 4 \int_0^t \mathbb{E} \left(\left\| \sigma(u, X_u^k) - \sigma(u, X_u^{k-1}) \right\|^2 \right) du \leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E} \left(\left\| X_u^k - X_u^{k-1} \right\|^2 \right) du,$$

woraus zusammen folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \left\| X_s^{k+1} - X_s^k \right\|^2 \right) &\leq \underbrace{2K^2(4+T)}_{=: L=L(K,T)} \int_0^t \mathbb{E} \left(\sup_{v \leq u} \left\| X_v^k - X_v^{k-1} \right\|^2 \right) du \\ &\leq L \int_0^t \mathbb{E} \left(\sup_{v \leq u} \left\| X_v^k - X_v^{k-1} \right\|^2 \right) du \\ &\leq L^2 \int_0^t \int_0^u \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq v} \left\| X_s^{k-1} - X_s^{k-2} \right\|^2 \right) dv du \\ &\leq L^k \underbrace{\int_0^t \int_0^u \int_0^v \dots}_{=\frac{t^k}{k!}} = \frac{(Lt)^k}{k!} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq T} \left\| X_t^1 - \xi \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Unter Beachtung, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T} \left\| X_t^1 - \xi \right\|^2 \right) &\leq 2 \mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T} \left\| X_t^1 \right\|^2 \right) + 2 \mathbb{E} \|\xi\|^2 \\ &\leq 2C(K, T)(1 + \|\xi\|^2) e^{C(K, T)t} + 2 \mathbb{E} \|\xi\|^2 \\ &\leq \underbrace{\tilde{c}(1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2)}_{=: c^*} e^{C(K, T)t} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq T} \|X_t^{k+1} - X_t^k\| \geq \frac{1}{2^{k+1}}\right) &\leq (2^{k+1})^2 \mathbb{E}\left(\sup_{t \leq T} \|X_t^{k+1} - X_t^k\|^2\right) \\ &\leq 4 \cdot 2^{2k} \cdot c^* \cdot \frac{(Lt)^k}{k!} = 4c^* \frac{(4Lt)^k}{k!}, \end{aligned}$$

was in k summierbar ist. Nach dem ersten Borel-Cantelli-Lemma folgt, dass ein $\Omega^* \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ existiert, sodass für alle $\omega \in \Omega^*$ ein $N = N(\omega)$ existiert, sodass für alle $k \geq N(\omega)$ gilt $\sup_{t \leq T} \|X_t^{k+m} - X_t^k\| \leq 2^{-k+1}$ für alle $m \geq 1$. Also ist $(X_t^k)_{t \leq T}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ und konvergiert gegen ein $(X_t)_{t \leq T}$. Also existiert ein stetiger, stochastischer Prozess X , sodass $X^k \rightarrow X$ gleichmäßig auf kompakten Intervallen. Die Schranke folgt unmittelbar aus der vorigen Aufgabe mit dem Lemma von Fatou.

Es bleibt zu zeigen, dass X auch eine starke Lösung ist. X ist stetig und \mathcal{F}_t -adaptiert und $X_0 = \xi$ f.s., da $X_0^k = \xi$ für alle k gilt. Die Integrierbarkeitsbedingung $\int_0^t |b_i(s, X_s)| ds < \infty$ und $\int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)^2 ds < \infty$ folgen aus der Wachstumsbedingung und die Schranke an $\mathbb{E} \|X_s\|^2$. Dass die stochastische Differentialgleichung erfüllt ist, ist die folgende Aufgabe. \square

Aufgabe 4.2.7:

$X_t = \lim_k X_t^k$ erfüllt die SDE (*).

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass $\int_0^t b(s, X_s^k) ds \rightarrow \int_0^t b(s, X_s) ds$ und $\int_0^t \sigma(s, X_s^k) dW_s \rightarrow \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ in einem geeigneten Sinne.

Zum gewöhnlichen Integral: Auf Ω^* gilt mit dem Limes $m \rightarrow \infty$

$$2^{-k} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \|X_t^{k+m} - X_t^k\| = \|X_t - X_t^k\| \text{ für } k \geq N(\omega),$$

sodass folgt

$$\left\| \int_0^t b(s, X_s^k) ds - \int_0^t b(s, X_s) ds \right\|^2 \leq K^2 T \int_0^t \underbrace{\|X_s^k - X_s\|^2}_{\rightarrow 0} ds \rightarrow 0 \text{ f.s.}$$

da die Konvergenz auf Kompakta gleichmäßig ist.

Zum stochastischen Integral: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left\| \int_0^t \sigma(s, X_s^k) dW_s - \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \right\|^2\right) &= \int_0^t \mathbb{E}\left(\|\sigma(s, X_s^k) - \sigma(s, X_s)\|^2\right) ds \\ &\leq K^2 \int_0^t \mathbb{E} \|X_s^k - X_s\|^2 ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $k \rightarrow \infty$ nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz, denn $(X_t^k)_t$ ist eine L^2 -Cauchyfolge, sodass $\mathbb{E} \|X_s^k - X_s\|^2 \rightarrow 0$ und wegen unserer Abschätzungen an $\mathbb{E} \|X_t^k\|$ und $\mathbb{E} \|X_t\|$ haben wir eine obere Schranke für den Integranden. \square

4.2.A. Vergleichende Ergebnisse und weitere Verbesserungen

Satz 4.2.8:

Sei $d = r = 1$, $|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$, $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq h(|x - y|)$, wo $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine monoton steigende Funktion mit $h(0) = 0$ und $\int_0^\varepsilon \frac{1}{h^2(u)} du = \infty$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann gilt starke Eindeutigkeit.

Beweis:

Ohne Beweis. □

Beispiel 4.2.9:

Sei $h(u) = u^\alpha$ mit $\alpha \geq 1/2$. Also hat $X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha dW_s$ nach obigem Satz eine eindeutige starke Lösung. Dies ist $X_s \equiv 0$. Für $\alpha < 1/2$ gibt es allerdings keine Eindeutigkeit.

Satz 4.2.10 (Vergleichslemma):

Sei $d = r = 1$. Angenommen es gibt zwei starke Lösungen X^j für die SDE

$$X_t^j = X_0^j + \int_0^t b_j(s, X_s^j) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^j) dW_s, j = 1, 2, t \geq 0,$$

wobei $[0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto b_j(t, x), \sigma(t, x)$ stetig und reellwertig sind, $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq h(|x - y|)$ mit einer Funktion h wie oben. Gilt $X_0^1 \leq X_0^2$ f.s. sowie $b_1(t, x) \leq b_2(t, x)$ für alle (t, x) und sind b_1 oder b_2 global Lipschitz-stetig, so gilt

$$\mathbb{P}(X_t^1 \leq X_t^2 \quad \forall t \geq 0) = 1.$$

Beweis:

Ohne Einschränkung sei b_1 Lipschitz. Nach Lokalisierung kann man auch OE annehmen, dass $\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s, X_s^j)|^2 ds < \infty$ für $j = 1, 2$ für jede starke Lösung X^j .

Nach der Voraussetzung an h existiert eine Folge $a_n \downarrow 0$ mit $a_0 = 1$ und $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{1}{h^2(u)} du = n$ für alle n . Konstruiere nun Hilfsfunktionen ρ_n auf \mathbb{R} mit $\text{supp } \rho_n \subset (a_n, a_{n-1})$, sodass $0 \leq \rho_n(x) \leq \frac{2}{nh^2(x)}$ und $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho_n(x) dx = 1$. Definiere $\psi_n(x) := \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(u) du dy$, so ist $\psi_n \in \mathcal{C}^2$, $|\psi_n'(x)| \leq 1$ und $\lim_n \psi_n(x) = \lim_n \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(u) du dy = |x|$. Setze schließlich $\varphi_n(x) := \psi_n(x) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$. Beachte hierbei, dass $\varphi_n \in \mathcal{C}^2$, da $\psi_n \in \mathcal{C}^2$ mit $\psi_n(0) = 0$.

Wir suchen nun eine Abschätzung für $\mathbb{E} \varphi_n(X_t^1 - X_t^2)$. Dazu definiere $\Delta_t := X_t^1 - X_t^2$. Es gilt

$$d\Delta_t = (b_1(t, X_t^1) - b_2(t, X_t^2)) dt + (\sigma(t, X_t^1) - \sigma(t, X_t^2)) dW_t,$$

sowie

$$\begin{aligned} d\varphi_n(\Delta_t) &= \varphi_n'(\Delta_t) d\Delta_t + \frac{1}{2} \varphi_n''(\Delta_t) (d\Delta_t)^2 \\ &= \varphi_n'(\Delta_t) (b_1(t, X_t^1) - b_2(t, X_t^2)) dt + \dots dW_t + \frac{1}{2} \varphi_n''(\Delta_t) (\sigma(t, X_t^1) - \sigma(t, X_t^2))^2 dt. \end{aligned}$$

Also folgt wegen $\Delta_0 \leq 0$ f.s.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \varphi_n(\Delta_t) &= 0 + \mathbb{E} \int_0^t \varphi_n'(\Delta_s) (b_1(s, X_s^1) - b_2(s, X_s^2)) ds \\
&\quad + 0 + \mathbb{E} \int_0^t \frac{1}{2} \varphi_n''(\Delta_s) (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))^2 ds \\
&\leq \mathbb{E} \int_0^t |\varphi_n'(\Delta_s)|_{\leq \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\Delta_s)} \underbrace{|b_1(s, X_s^1) - b_2(s, X_s^2)|}_{\leq K|X_s^1 - X_s^2|} ds \\
&\quad + \mathbb{E} \int_0^t \underbrace{|\varphi_n''(\Delta_s)|}_{\geq 0} \underbrace{(b_1(s, X_s^1) - b_2(s, X_s^2))}_{\leq 0 \text{ wegen } b_1 \leq b_2} ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t |\varphi_n''(\Delta_s)| |\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)|^2 ds \\
&\leq K \mathbb{E} \int_0^t |X_s^1 - X_s^2| \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\Delta_s) ds + 0 + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \underbrace{\varphi_n''(\Delta_s) h(|\Delta_s|)^2}_{\underbrace{\rho_n(|\Delta_s|)}_{\leq \frac{2}{n}}} ds \\
&\leq K \int_0^t \mathbb{E} \Delta_s^+ ds + \frac{1}{n} t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K \int_0^t \mathbb{E} \Delta_n^+ ds.
\end{aligned}$$

Für den Limes $n \rightarrow \infty$ gilt $\psi_n \uparrow$ und $\psi_n(\Delta_s) \rightarrow |\Delta_s|$, sodass $\varphi_n(\Delta_s) \rightarrow |\Delta_s| \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\Delta_s) = \Delta_s^+$ und $\varphi_n \uparrow$. Aus monotoner Konvergenz folgt also $\mathbb{E} \varphi_n(\Delta_t) \uparrow \mathbb{E} \Delta_t^+$, d.h.

$$\mathbb{E} \Delta_t^+ \leq K \int_0^t \mathbb{E} \Delta_s^+ ds,$$

sodass aus Gronwalls Lemma $\mathbb{E} \Delta_s^+ = 0$ folgt, d.h. $X_t^1 \leq X_t^2$ \mathbb{P} -f.s. Mit Hilfe der Stetigkeit der beiden Prozesse gilt also $\mathbb{P}(X_t^1 \leq X_t^2 \forall t \geq 0) = 1$. \square

Beispiel 4.2.11:

Betrachte als Anwendung in Dimension 1 einen Prozess mit $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma dW_t$, $X_0 = \delta > 0$ (wobei δ klein sein soll). Angenommen es gilt $b(t, x) \leq -b_0 < 0$ für alle x und $t \geq 0$. Betrachte ferner die deterministische Gleichung $dX_t^{det} = b(t, X_t^{det}) \leq -b_0$ für $X_t^{det} \geq 0$ mit $X_0^{det} = \delta$. Es gilt $X_t^{det} \leq \delta - b_0 t$.

Es stellt sich nun die Frage, wie $\mathbb{P}^\delta(X_t > 0 \forall t \leq t_1)$ von δ, σ, t_1 abhängt?

Definiere $X_t^0 := \delta - b_0 t + \sigma W_t$ ($dX_t^0 = -b_0 dt + \sigma dW_t$, $X_0^0 = \delta$). Für $\rho > 0$ gilt

$$\mathbb{P}^\delta(X_t > 0 \forall t \leq t_1) \leq \mathbb{P}^\delta(X_t > 0 \forall t \leq t_1, \sup_{s \leq t_1} \sigma W_s \leq \rho) + \mathbb{P}^\delta(\sup_{s \leq t_1} \sigma W_s > \rho).$$

Für den ersten Term gilt auf $\{X_t > 0 \forall t \leq t_1\}$ nach dem Vergleichslemma $X_t \leq X_t^0 \forall t \leq t_1$ und daher $0 < X_t < X_t^0 \leq \delta + \rho - b_0 t$, falls $\sup_{s \leq t_1} \sigma W_s \leq \rho$. Mit der Wahl $\rho = b_0 t_1 - \delta$ gilt

$$\mathbb{P}(X_t > 0 \forall t \leq t_1, \sup_{s \leq t_1} \sigma W_s \leq \rho) \leq \mathbb{P}(0 \leq X_t^0 \leq b_0(t_1 - t) \forall t \leq t_1) \leq \mathbb{P}(0 < X_{t_1}^0 \leq 0) = 0.$$

Beim zweiten Term gilt für alle $\gamma > 0$ und der Doob'schen Submartingalungleichung

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t_1} \sigma W_s > \rho) \leq \mathbb{P}(\sup_{s \leq t_1} e^{\gamma \sigma W_s} > e^{\gamma \rho}) \leq e^{-\gamma \rho} \mathbb{E} e^{\gamma \sigma W_{t_1}},$$

wobei der letzte Term eine Laplace-Transformierte darstellt. Daher gilt

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t_1} \sigma W_s > \rho) \leq e^{-\gamma \rho} e^{\frac{\gamma^2 \sigma^2 t_1}{2}} = e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2 t_1}}$$

mit der Wahl $\gamma = \frac{\rho}{\sigma^2 t_1}$. Also gilt zusammen

$$\mathbb{P}^\delta(X_t > 0 \forall t \leq t_1) \leq e^{-\frac{(b_0 t_1 - \delta)^2}{2\sigma^2 t_1}}.$$

Daraus folgt, dass die Wahrscheinlich exponentiell gegen 0 fällt in $\frac{1}{\sigma^2}$ respektive $\frac{1}{\sigma^2 t_1}$. Weil wir annehmen müssen, dass $t_1 > \frac{\delta}{b_0}$, müssen wir t_1 zu δ proportional vergrößern, wenn wir X in großen δ starten.

Im deterministischen Fall gilt $X_t^{det} \leq 0$ für $t > \frac{\delta}{b_0}$. Im stochastischen Fall kann der Ursprung bereits früher erreicht werden. Wir haben lediglich eine Schranke für das späte Erreichen angegeben.

Wähle man schließlich $t_1 = (1+k)\frac{\delta}{b_0}$ für $k > 0$, so gilt

$$\mathbb{P}^\delta(X_t > 0 \forall t \leq t_1) \leq \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{k^2}{\sigma^2(1+k)} \frac{b_0}{\delta}\right).$$

4.3. Schwache Lösung

Definition 4.3.1:

Eine schwache Lösung der SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (*)$$

ist ein Tripel $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t$, sodass

- i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_t$ eine Filtration von \mathcal{F} , welche den üblichen Bedingungen genügt,
- ii) X ist ein stetiger, $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierter, \mathbb{R}^d -wertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und W ist eine $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptierte Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in \mathbb{R}^r ,
- iii) $\int_0^t |b_i(s, X_s)| ds < \infty$, $\int_0^t |\sigma_{ij}(s, X_s)|^2 ds < \infty$ \mathbb{P} -f.s. für alle $t \geq 0$, $i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n$,
- iv) $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ für $t \geq 0$.

Definition:

$\mu := \mathbb{P}_{X_0}^{-1}$ wird Startverteilung genannt.

Beachte dabei, dass wir nicht voraussetzen, dass \mathcal{F}_t die Augmentierung der Filtration $G_t := \sigma(\xi, \mathcal{F}_t^W)$ ist, d.h. X_t ist nicht notwendigerweise ein messbares Funktional der Brownschen Bewegung W und ξ . Wenn X_t nicht messbar bezüglich der Augmentierung von G_t ist, dann sind die zusätzlichen Informationen unabhängig von $(W_u - W_t, u \geq t)$.

Warnung: Die Existenz einer schwachen Lösung $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t$ impliziert nicht, dass für eine gegebene Brownsche Bewegung \tilde{W} auf einem W-Raum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ ein stochastischer Prozess \tilde{X} existiert, sodass $(\tilde{X}, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), (\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ eine schwache Lösung ist. Allerdings folgt aus der Existenz einer starken Lösung die Existenz einer schwachen Lösung.

4.3.A. Begriff der Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Definition 4.3.2 (Pfadweise Eindeutigkeit):

Zwei schwache Lösungen $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t, (\tilde{X}, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ mit $\mathbb{P}(X_0 = \tilde{X}_0) = 1$ heißen pfadweise eindeutig, falls $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t \forall t \geq 0) = 1$.

Bemerkung 4.3.3:

Die Resultate zur starken Eindeutigkeit sind hier anwendbar.

Definition 4.3.4 (Eindeutigkeit im Sinne der Verteilung):

Zwei schwache Lösungen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t, (X, W)$ und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), (\tilde{\mathcal{F}}_t)_t, (\tilde{X}, \tilde{W})$ heißen eindeutig im Sinne der Verteilung, falls $\mathbb{P}X^{-1} = \tilde{\mathbb{P}}\tilde{X}^{-1}$. Entsprechend sagen wir, dass Eindeutigkeit im Sinne der Verteilung für die SDE (*) gilt, falls dies für je zwei Lösungen gilt.

Beachte hierbei, dass die Eindeutigkeit im Sinne der Verteilung nicht die pfadweise Eindeutigkeit nach sich zieht.

Beispiel 4.3.5 (Tanaka-Gleichung):

Betrachte die SDE $dX_t = \text{sgn}(X_t)dW_t$.

Schritt 1: Eindeutigkeit

Gegeben eine schwache Lösung $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t, (X, W)$ mit Startverteilung $\mu = \mathbb{P}X_0^{-1}$ ist X ein stetiges, quadratintegrierbares Martingal mit quadratischer Variation $\langle X \rangle_t = \int_0^t \text{sgn}^2(X_s)ds = t$, sodass nach Levys Charakterisierung X eine Brownsche Bewegung mit Startverteilung μ ist, d.h. es gilt Eindeutigkeit im Verteilungssinne.

Allerdings gilt hier nicht die pfadweise Eindeutigkeit: gegeben eine schwache Lösung $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t, (X, W)$ ist auch $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t, (\tilde{X} = -X, W)$ eine schwache Lösung:

$$\tilde{X} = -X_t = -\int_0^t \text{sgn}(X_s)dW_s = \int_0^t \text{sgn}(\tilde{X}_s)dW_s,$$

aber die Pfade von X und $-X$ sind nicht fast sicher gleich.

Schritt 2: Existenz

Betrachte die Startverteilung $\mu = \delta_0$, d.h. $X_0 = 0$ f.s. Die SDE hat eine schwache Lösung: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum mit einer Brownschen Bewegung X und definiere $\mathcal{F}_t := \overline{\mathcal{F}_t^X}$, wobei dies die Augmentierung von \mathcal{F}_t bzgl. \mathbb{P} bezeichne. Die Idee ist nun, eine Brownsche Bewegung W zu konstruieren, sodass das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\overline{\mathcal{F}_t^X})_t, (X, W)$ eine schwache Lösung ist. Dazu definiere

$$W_t := \int_0^t \text{sgn}(X_s)dX_s,$$

was nach Levys Charakterisierungssatz eine Brownsche Bewegung ist. Nun gilt nach Korollar 3.2.20

$$X_t = \int_0^t dX_s = \int_0^t \text{sgn}(X_s)\text{sgn}(X_s)dX_s = \int_0^t \text{sgn}(X_s)dW_s.$$

Allerdings besitzt diese SDE keine starke Lösung. Angenommen es existiert eine starke Lösung zu einer gegebenen BM $(W_t)_t$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nach Teil (i) der Definition ist X_t messbar bezüglich $\mathcal{F}_t = \sigma(G_t \cup N) =: \overline{\mathcal{F}_t^W}$, d.h. $\sigma(X_t) \subset \overline{\mathcal{F}_t^W}$ und damit auch $\overline{\mathcal{F}_t^X} \subset \overline{\mathcal{F}_t^W}$. Wegen $dX_t = \text{sgn}(X_t)dW_t$ gilt

$$W_t = \int_0^t dW_s = \int_0^t \text{sgn}(X_s)\text{sgn}(X_s)dW_s = \int_0^t \text{sgn}(X_s)dX_s,$$

sodass X eine Brownsche Bewegung ist. Nach der Tanaka-Formel (Aufgabe 1.II c) folgt also $W_t = \int_0^t \text{sgn}(X_s)dX_s = |X_t| - |X_0| - L_t$. Also ist W_t messbar bezüglich $\mathcal{F}_t^{|X|}$, d.h. es folgt der Widerspruch

$$\overline{\mathcal{F}_t^X} \subset \overline{\mathcal{F}_t^W} \subset \overline{\mathcal{F}_t^{|X|}},$$

da X eine Brownsche Bewegung ist.

4.3.B. Schwache Lösungen mit Hilfe des Girsanov-Theorems

Proposition 4.3.6 (Existenz einer schwachen Lösung):

Betrachte die SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t \text{ mit } 0 \leq t \leq T.$$

Wenn es eine positive Konstante K gibt, sodass $\|b(t, x)\| \leq K(1 + \|x\|)$, $0 \leq t \leq T$, dann gibt es für jedes W -Maß μ auf \mathbb{R}^d eine schwache Lösung mit Startverteilung μ .

Beweis:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}), \mathbb{P}^x, X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ eine Brownsche Familie. Dann folgt aus dem Korollar 3.5.16 und der Wachstumsbedingung, dass

$$Z_t := \exp \left(\sum_{j=1}^d \int_0^t b_j(s, X_s) dX_s^j - \frac{1}{2} \int_0^t \|b(s, X_s)\|^2 ds \right)$$

ein Martingal unter jedem Maß \mathbb{P}^x ist. Definiere $Q^x(A) := \mathbb{E}^x(\mathbb{1}_A Z_T)$, $A \in \mathcal{F}_T$. Nach Girsanovs Theorem ist $W_t = X_t - X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q^x)$ mit $Q^x(W_0 = 0) = 1$ und eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}_t, Q^\mu)$ mit $Q^\mu(W_0 = 0) = 1$, d.h. $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + W_t$ und das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q^\mu), (\mathcal{F}_t)_t, (X, W)$ ist eine schwache Lösung mit Startverteilung μ . \square

Proposition 4.3.7 (Eindeutigkeit im Sinne der Verteilung via Girsanov):

Angenommen $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^i), (\mathcal{F}_t^i)_t, (X^i, W^i), i = 1, 2$ sind zwei schwache Lösungen zu der SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t \text{ mit } 0 \leq t \leq T$$

mit gleicher Anfangsverteilung μ . Falls $\mathbb{P}^i \left(\int_0^t \|b(t, X_t^i)\|^2 dt < \infty \right) = 1$ gilt, dann haben (X^1, W^1) und (X^2, W^2) die selbe Verteilung unter ihrem respektiven Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis:

Definiere für $k \in \mathbb{N}$ $\tau_k^i = T \wedge \inf\{0 \leq t \leq T : \int_0^t \|b(s, X_s^i)\|^2 ds = k\} \rightarrow T$ \mathbb{P}^i -f.s. für $k \rightarrow \infty$. Dann genügt $Y_t^i = b(t, X_t^i) \mathbb{1}_{\{t \leq \tau_k^i\}}$ der Novikov-Bedingung (Korollar 3.5.13), denn

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{T'} \|Y_t^i\|^2 dt \right) \right) < \infty,$$

sodass $\xi_t^k(X^i) := \exp \left(- \int_0^{t \wedge \tau_k^i} b(s, X_s^i) dW_s^i - \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau_k^i} \|b(s, X_s^i)\|^2 ds \right)$ ein Martingal ist.

Definiere nun $d\tilde{\mathbb{P}}_k^i = \xi_T^k(X^i) d\mathbb{P}^i$ auf \mathcal{F}_T^i . Nach dem Girsanov-Theorem ist

$$X_0^i + \int_0^{t \wedge \tau_k^i} b(s, X_s^i) ds + W_t^i, 0 \leq t \leq T$$

eine d -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich $\tilde{\mathbb{P}}_k^i$ mit Startverteilung μ und $X_{t \wedge \tau_k^i}^i = X_0^i + \int_0^{t \wedge \tau_k^i} b(s, X_s^i) ds + W_{t \wedge \tau_k^i}^i$, $0 \leq t \leq T$ eine d -dimensionale BM gestoppt zur Zeit τ_k^i . Seien nun $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ und $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d(n+1)})$, $(X_{t_0}^1, W_{t_0}^1, \dots, X_{t_n}^1, W_{t_n}^1) \in \Gamma = A^1 \in \mathcal{F}_T^1$ und $(X_{t_0}^2, W_{t_0}^2, \dots, X_{t_n}^2, W_{t_n}^2) \in \Gamma = A^2 \in \mathcal{F}_T^2$. Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(A^1 \cap \tau_k^1 = T) &= \int_{\Omega^1} \mathbb{1}_{\{A^1; \tau_k^1 = T\}} d\mathbb{P}^1 = \int_{\Omega^1} \mathbb{1}_{\{A^1; \tau_k^1 = T\}} \frac{1}{\xi_T^k(X^1)} d\tilde{\mathbb{P}}_k^1 \\ \mathbb{P}^2(A^2 \cap \tau_k^2 = T) &= \int_{\Omega^2} \mathbb{1}_{\{A^2; \tau_k^2 = T\}} d\mathbb{P}^2 = \int_{\Omega^2} \mathbb{1}_{\{A^2; \tau_k^2 = T\}} \frac{1}{\xi_T^k(X^2)} d\tilde{\mathbb{P}}_k^2, \end{aligned}$$

d.h. $\mathbb{P}^1(A^1; \tau_k^1 = T) = \mathbb{P}^2(A^2; \tau_k^2 = T)$ für alle $k \geq 1$. Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ liefert wegen $\tau_k^i \rightarrow T$ \mathbb{P}^i -f.s. also $\mathbb{P}^1(A^1) = \mathbb{P}^2(A^2)$ und damit die Behauptung. \square

4.3.C. Ein Exkurs über reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 4.3.8:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $G \subset \mathcal{F}$ eine σ -Algebra. Dann heißt $Q : \Omega \times \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit für \mathcal{F} gegeben G , falls

- i) $Q(\omega, \cdot)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) für jedes feste ω ,
- ii) $\omega \mapsto Q(\omega, A)$ ist G -messbar für jedes feste $A \in \mathcal{F}$,
- iii) $Q(\omega, A) = \mathbb{P}(A | G)(\omega)$ für \mathbb{P} -f.a. $\omega \in \Omega$ und alle $A \in \mathcal{F}$.

Q ist eindeutig, falls gilt: Q, Q' erfüllen i), ii), iii) $\Rightarrow \exists N \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(N) = 0 \forall A \in \mathcal{F} \forall \omega \in \Omega : Q(\omega, A) = Q'(\omega, A)$.

Definition 4.3.9:

Sei (Ω, \mathcal{F}) ein messbarer Raum. Dann heißt \mathcal{F}

- i) abzählbar bestimmt, falls für alle W-Maße μ, ν auf (Ω, \mathcal{F}) ein $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$, \mathcal{M} abzählbar, sodass $\mu(M) = \nu(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}$, $\mu = \nu$,
- ii) abzählbar erzeugt, dass es ein $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ gibt, sodass $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$.

Betrachte nun $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^m) =: \mathcal{C}_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{B}_t(\mathcal{C}_m) := \varphi_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{C}_m)) = \sigma((z(t_1), \dots, z(t_n)) \in A : n \geq 1, t_i \in [0, t] \cap \mathbb{Q} \forall i, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{mn}), A = \times_i [a_i, b_i], a_i, b_i \in \mathbb{Q}) =: \sigma(\varphi_t)$, wobei $(\varphi_t z)(s) = z(s \wedge t)$.

Also ist $\mathcal{B}_t(\mathcal{C}_m)$ abzählbar erzeugt. \mathcal{C}_t ist eine abzählbare Ansammlung von endlich-dimensionalen Zylinder-Mengen der Form $C = \{z \in \mathcal{C}_m : (z(t_1), \dots, z(t_n)) \in A, A = \times_i [a_i, b_i], a_i, b_i \in \mathbb{Q} \cap [0, t]\}$. Daher ist \mathcal{C}_t abgeschlossen unter Schnitten und damit folgt $\mu = \nu$ auf $\mathcal{C}_t \Rightarrow \mu = \nu$ auf $\sigma(\mathcal{C}_t) = \mathcal{B}(\mathcal{C}_m)$. Also ist $\mathcal{B}_t(\mathcal{C}_m)$ abzählbar bestimmt.

Dieses Argument gilt allgemeiner in einem topologischen Raum mit abzählbarer Basis. Dazu nehme man $\mathcal{C} := \{\text{endliche Schnitte von Komplementen von Mengen aus der Basis}\}$. Dies gilt z.B. für separable metrische Räume.

Satz 4.3.10:

Sei Ω polnisch und $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) und $G \subset \mathcal{F}$ eine σ -Algebra. Dann gilt:

- i) Es existiert eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit Q für \mathcal{F} gegeben G und diese ist eindeutig.
- ii) Falls $H \subset G$ eine abzählbar bestimmte σ -Algebra ist, dann existiert ein $N \in G, \mathbb{P}(N) = 0$, sodass $Q(\omega, A) = \mathbb{1}_A(\omega)$ für alle $A \in H$ und $\omega \in N^c$.
- iii) Falls X G -messbar ist und Werte in einem polnischen Raum annimmt, dann gilt mit der Wahl $H = \sigma(X)$ $Q(\omega, \{\omega' : X(\omega) = X(\omega')\}) = 1$ für \mathbb{P} -f.a. ω .

Satz 4.3.11 (Spezialfall $G = \sigma(X)$):

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ wie oben und $X : \Omega \rightarrow S$ \mathcal{F} - S -messbar. Dann existiert ein $Q : S \times \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, sodass

- i) $Q(x, \cdot)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) für alle $x \in S$,
- ii) $x \mapsto Q(x, A)$ ist \mathcal{S} -messbar für alle $A \in \mathcal{F}$,
- iii) $Q(x, A) = \mathbb{P}(A \mid X = x)$ für $\mathbb{P} X^{-1}$ -f.a. $x \in S$ und alle $A \in \mathcal{F}$.

Falls S ein polnischer Raum ist und $\mathcal{S} = \mathcal{B}(S)$, dann kann die Nullmenge so gewählt werden, sodass $Q(x, X^{-1}(B)) = \mathbb{1}_B(x)$ für alle $B \in \mathcal{S} \forall x \in N^c$. Speziell gilt für $B = X^{-1}(\{x\})$ $Q(x, X^{-1}(\{x\})) = 1$ für $\mathbb{P} X^{-1}$ -f.a. $x \in S$.

4.3.D. Ergebnisse von Yamada und Watanabe zu schwachen und starken Lösungen

Die Frage ist, wie die Verbindung der verschiedenen Konzepte der Eindeutigkeit von (X^i, W^i) , $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}^i)$, $(\mathcal{F}_t^i)_t$ ($i = 1, 2$) einer schwachen Lösung zu der SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

mit $\mu = \mathbb{P}^1(X_0^1)^{-1} = \mathbb{P}^2(X_0^2)^{-1}$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ ist.

Setze $Y_t^i = X_t^i - X_0^i$. Die Lösung (X^i, W^i) ist bestimmt durch X_0^i, W^i, Y^i . Betrachte das Maß $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}^i(X_0^i, W^i, Y^i)^{-1}$ auf $\Theta := \mathbb{R}^d \times C_r \times C_d$ mit der σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(C_r) \otimes \mathcal{B}(C_d)$. Für $\theta \in \Theta$, $\theta = (x, \omega, y)$ sind die Randverteilungen unter \mathbb{P}_i $x \sim \mu, \omega \sim \mathbb{P}_*$, $(x, \omega) \sim \mu \otimes \mathbb{P}_i$, denn X_0^i ist unabhängig von W^i und $Y_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s.

Die technische Schwierigkeit ist nun, dass (X^1, W^1) und (X^2, W^2) nicht notwendigerweise auf dem gleichen Raum definiert sind. Wir benötigen daher einen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum für die Lösungen, ohne die individuellen Verteilungen zu verändern. Auf $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \mathbb{P}_i)$ existiert eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit für $\mathcal{B}(\Theta)$ gegeben (x, ω) . Wir benötigen nur eine reg. bed. W-Keit für Mengen der speziellen Form $\mathbb{R}^d \times C_r \times F$ mit $F \in \mathcal{B}(C_d)$. Nach Theorem 3.13 (???) gilt:

- i) $Q_i(x, \omega, \cdot)$ ist ein W-Maß auf $(C_d, \mathcal{B}(C_d))$.
- ii) $(x, \omega) \mapsto Q_i(x, \omega, F)$ ist messbar für alle F .
- iii) $\mathbb{P}_i(G \times F) = \int_G Q_i(x, \omega, F) \mu(dx) \mathbb{P}_*(d\omega)$ ist definiert als reguläre bed. W-Keit für alle $F \in \mathcal{B}(C_d)$ und $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(C_r)$.

Definiere nun (Ω, \mathcal{F}) via $\Omega := \Theta \times C_d$ und $\mathcal{F} :=$ Vervollständigung von $\mathcal{B}(\Theta) \otimes \mathcal{B}(C_d)$ durch Nullmengen unter $\mathbb{P}(d\omega) = Q_1(x, \omega, dy_1)Q_2(x, \omega, dy_2)\mu(dx) \mathbb{P}_*(d\omega)$ mit $\omega = (x, w, y_1, y_2) \in \Omega$. Als Filtration nutze $G_t := \sigma((x, \omega(s), y_1(s), y_2(s)) : s \in [0, t])$ und $\tilde{G}_t = \sigma(G_t \cup N)$ und schließlich $\mathcal{F}_t = \tilde{G}_{t+}$. Damit gilt

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : (x, \omega, y_i) \in A) = \mathbb{P}((x, \omega, y_1, y_2) \in A \times C_d), i = 1, 2$$

mit $A = G \times F$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\omega \in \Omega : (x, \omega, y_i) \in A) &= \mathbb{P}((x, \omega) \in G, y_i \in F, y_j \in C_d) \\ &= \int_G Q_i(x, \omega, F) \underbrace{Q_j(x, \omega, C_d)}_{=1} \mu(dx) \mathbb{P}_*(d\omega) \\ &= \int_G Q_i(x, \omega, F) \mu(dx) \mathbb{P}_*(d\omega) \\ &= \mathbb{P}_i(G \times F) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}^i((X_0^i, W^i, Y^i) \in A), \end{aligned}$$

woraus $\mathbb{P}(x + y_i, \omega)^{-1} = \mathbb{P}^i(X^i, W^i)^{-1}$ folgt.

Satz 4.3.12 (Yamada, Watanabe, 1971):

Aus pfadweiser Eindeutigkeit folgt Eindeutigkeit im Sinne der Verteilung.

Beweis:

Seien $(X^i, W^i), \dots$ wie oben die zwei schwache Lösungen mit $\mathbb{P}^i(X_0^i)^{-1} = \mu$. Dann ist $(x + y_i, \omega)$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t$ schwache Lösungen der SDE. Nach der pfadweisen Eindeutigkeit gilt

$$1 = \mathbb{P}(x + y_1(t) = x + y_2(t) \ \forall t \geq 0) = \mathbb{P}((x, \omega, y_1, y_2) \in \Omega : y_1 = y_2). \quad (**)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1((X_0^1, W^1, Y^1) \in A) &= \mathbb{P}((x, \omega, y_1) \in A) \stackrel{**}{=} \mathbb{P}((x, \omega, y_2) \in A) \\ &= \mathbb{P}^2((X_0^2, W^2, Y^2) \in A) \end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\Theta)$. Also gilt $\mathbb{P}^1(X^1)^{-1} = \mathbb{P}^2(X^2)^{-1}$ und damit die Eindeutigkeit im Sinne der Verteilung. \square

Das nächste Ziel ist zu zeigen, dass die Existenz einer schwachen Lösung und pfadweise Eindeutigkeit zur starken Existenz einer Lösung führt.

Korollar 4.3.13:

Angenommen die SDE hat eine Schwache Lösung $(X^1, W^1), (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1), (\mathcal{F}_t^1)_t$ mit Anfangsverteilung μ und es gilt pfadweise Eindeutigkeit. Dann existiert eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(C_r) - \mathcal{B}(C_d)$ -messbare Funktion $h : \mathbb{R}^d \times C_r \rightarrow C_d$, welche $\hat{\mathcal{B}}_t - \mathcal{B}_t(C_d)$ -messbar ist für jedes feste t , sodass $X = h(X_0, W)$ \mathbb{P}^1 -f.s. gilt. Dabei bezeichnet $\mathcal{B}_t(C_d) = \varphi_t^{-1}(\mathcal{B}(C_d))$ und $\hat{\mathcal{B}}_t$ ist die Augmentierung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}_t(C_r)$ mit den Nullmengen aus $\mu \otimes \mathbb{P}_$.*

Falls $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, der groß genug ist, um eine \mathbb{R}^d -wertige Zufallsvariable $\xi \sim \mu$ und eine unabhängige Brownsche Bewegung \tilde{W} (bzgl. $(\tilde{\mathcal{F}}_t^W)_t$), dann ist $\tilde{X} = h(\xi \tilde{W})$ eine starke Lösung mit Anfangsverteilung ξ .

Für den Beweis benötigen wir die folgende Aufgabe.

Aufgabe 4.3.14:

Mit den bisherigen Notationen gilt: Falls pfadweise Eindeutigkeit vorliegt, dann existiert ein $k : \mathbb{R}^d \times C_r \rightarrow C_d$, sodass folgendes gilt:

- i) k ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(C_r) - \mathcal{B}(C_d)$ -messbar,
- ii) Für festes $t \geq 0$ ist $k \hat{\mathcal{B}}_t - \mathcal{B}_t(C_d)$ -messbar,
- iii) $Q_1(x, w, \{k(x, w)\}) = 1 = Q_2(x, w, \{k(x, w)\})$,
- iv) $\mathbb{P}((x, w, y_1, y) \in \Omega : y_1 = y_2 = k(x, w)) = 1$.

Beweis:

Zeige zunächst die dritte Behauptung. Sei (x, w) fest und definiere

$$Q(x, w, dy_1, dy_2) = Q_1(x, w, y_1)Q_2(x, w, y_2)$$

auf (S, \mathcal{S}) , $S = C_d \times C_d$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(C_d) \otimes \mathcal{B}(C_d)$. Nach der Definition von \mathbb{P} gilt für alle $B \in \mathcal{S}$, $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(C_r)$

$$\mathbb{P}(G \times B) = \int_G Q(x, w, B) \mu(dx) \mathbb{P}_*(dw).$$

Wähle $B = \{(y_1, y_2) \in S : y_1 = y_2\}$, so folgt mittels dem Beweis von Proposition 3.20 (???)

$$1 = \mathbb{P}((x, w, y_1, y_2) : y_1 = y_2) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^d \times C_r \times B) = \int_{\mathbb{R}^d \times C_r} Q(x, w, B) \mu(dx) \mathbb{P}_*(dw).$$

Wegen $0 \leq Q(\dots) \leq 1$ existiert eine $\mu \otimes \mathbb{P}_*$ -Nullmenge N , sodass $Q(x, w, B) = 1$ auf $(x, w) \notin N$. Für diese (x, w) gilt mittels Fubini in (*)

$$1 = Q(x, w, B) = \int_{\{y_1=y_2\}} Q(x, w, dy_1) Q(x, w, dy_2) \stackrel{*}{=} \int_{C_d} Q_1(x, w, \{y\}) Q_2(x, w, dy).$$

Für gegebenes (x, w) existiert ein $k(x, w)$ mit

$$Q_1(x, w, \{k(x, w)\}) = 1 = Q_2(x, w, \{k(x, w)\}),$$

sodass aus der Definition von \mathbb{P} folgt $\mathbb{P}((x, w, y_1, y_2) : y_1 = y_2 = k(x, w)) = 1$.

Es bleibt zu zeigen, dass k messbar ist. Beachte, dass $k(x, w) \in B \Leftrightarrow Q_i(x, w, B) = 1 \forall (x, w) \in N, B \in \mathcal{B}(C_d)$. Als reg. bed W-keit hat Q_i gute Messbarkeitseigenschaften, d.h. $(x, w) \mapsto Q_i(x, w, B)$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(C_r) - \mathcal{B}([0, 1])$ -messbar. Also ist $k \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(C_r) - \mathcal{B}(C_d)$ -messbar. Die letzte Eigenschaft ist eine Übung. \square

Beweis des Korollars:

Definiere $h(x, w) = x + k(x, w)$, so folgen die Messbarkeitseigenschaften aus denen von h . Nun gilt wegen der Beziehung von $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}_1$ und \mathbb{P}

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(X^1 = h(x_0, W^1)) &= \mathbb{P}^1(X^2 = x_0 + h(x_0, W^1)) \\ &= \mathbb{P}^1(Y^1 = h(x_0, W^1)) = \mathbb{P}((x, w, y_1, y_2) \in \Omega : y_1 = h(x, w)) = 1, \end{aligned}$$

woraus die erste Behauptung folgt.

Wähle ξ und \tilde{W} unabhängig, so gilt

$$(X_0, W) \stackrel{D}{=} (\xi, \tilde{W}) \sim \mu \otimes \mathbb{P}_*. \quad (\Delta)$$

$X = h(X_0, W^1)$ genügt der SDE und $\tilde{X} = h(\xi, \tilde{W})$ genügt ebenfalls der SDE wegen Δ . Es bleibt zu zeigen, dass \tilde{X} tatsächlich eine starke Lösung gegeben (ξ, \tilde{W}) ist. Dazu ist die Messbarkeit zu zeigen: \tilde{X} ist $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptiert. Für die letztliche Messbarkeitseigenschaft siehe die Übungen. \square

Diese letzte Messbarkeitseigenschaft zeigt das Kausalitätsprinzip, welches besagt, dass die starke Lösung X_t zur Zeit t nur von ξ und $\sigma(W_s : s \leq t)$ abhängt.

4.4. Martingal-Problem nach Stroock und Varadhan

Das Ziel ist es, die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen im Fall, dass b, σ nicht Lipschitz-stetig sind mit linearer Wachstumsbedingung zu zeigen (die Existenz starker Lösung ist in diesem Fall unklar). Dabei nehmen wir einen neuen Zugang: das Martingal-Problem. Insbesondere ist dies nützlich, wenn wir über schwache Konvergenz argumentieren wollen. Hierbei bestehen Verbindungen zu partiellen Differentialgleichungen.

Notation:

Für $f : [0, T] \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^d$ offen, schreiben wir $f \in \mathcal{C}^{k,l}([0, T] \times E, \mathbb{R})$, falls f k mal nach t und l mal nach x partiell differenzierbar ist und diese Ableitungen allesamt stetig in (t, x) sind.

Wir schreiben $f \in \mathcal{C}^{k,l}([0, T] \times E, \mathbb{R})$, wenn obiges erfüllt ist und alle Ableitungen stetige Fortsetzungen auf $[0, T] \times E$ haben. \mathcal{C}_b^k bezeichnet die beschränkten Funktionen aus \mathcal{C}^k und \mathcal{C}_0^k diejenigen Funktionen aus \mathcal{C}^k , welche kompakten Träger haben. Beachte, dass für $f \in \mathcal{C}_0^k$ alle Ableitungen (sowie die Funktion) beschränkt sind. Dies gilt nicht für $f \in \mathcal{C}_b^k$.

4.4.A. Fundamentale Martingale

Betrachte die SDE $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ in \mathbb{R}^d , wobei W_t eine r -dimensionale BM ist. Sei $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_t$ eine schwache Lösung. Definiere

$$(A_t f)(x) := \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^d a_{ik}(t, x) \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) \frac{df}{dx_i}(x) \text{ für } f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),$$

was für festes $t \geq 0$ ein Differentialoperator ist - hierbei ist $a = \sigma\sigma^T$. Falls $f = f(t, x)$, so operiert A_t auf $f(t, \cdot)$.

Satz 4.4.1:

Für alle $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ist der stochastische Prozess (unter Annahme der Existenz schwacher Lösung) $M_t^f := f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \left(\frac{df}{ds} + A_s f \right)(s, X_s) ds$ ein stetiges, lokales Martingal.

Sind $f, g \in \mathcal{C}^{1,2}$, dann gilt

$$\langle M^f, M^g \rangle_t = \int_0^t \sum_{i,k=1}^d a_{ik}(s, X_s) \frac{df}{dx_i}(s, X_s) \frac{dg}{dx_k}(s, X_s) ds.$$

Gilt $f \in \mathcal{C}_0^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und sind $\sigma_{ij} |_{\text{supp } f}$ beschränkt, so ist $M^f \in \mathcal{M}_2^c$.

Beweis:

Mit Hilfe der Itô-Formel gilt wegen $\langle X^i, X^j \rangle_t = \sum_{\nu=1}^r \sigma_{i\nu} \sigma_{j\nu} dt = a_{ij} dt$

$$\begin{aligned}
dM_t^f &= \frac{df}{dt}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^d \frac{df}{dx_i}(t, X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^d \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(t, X_t)d\langle X^i, X^k \rangle_t \\
&\quad - \frac{df}{dt}(t, X_t)dt - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^d a_{ik}(t, X_t) \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(t, X_t)dt - \sum_i b_i(t, X_t) \frac{df}{dx_i}(t, X_t)dt \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{df}{dx_i}(t, X_t)(b_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}(t, X_t)dW_t^j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(t, X_t)a_{ij}(t, X_t)dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(t, X_t)a_{ij}(t, X_t)dt - \sum_i b_i(t, X_t) \frac{df}{dx_i}(t, X_t)dt \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}(t, X_t) \frac{df}{dx_i}(t, X_t)dW_t^j.
\end{aligned}$$

Also ist $M_t^f = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r M_t^{i,j}$ mit stochastischen Integralen

$$M_t^{i,j} := \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s) \frac{df}{dx_i}(s, X_s) dW_s^j. \quad (*)$$

Definiere $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \|X_t\| \geq n \text{ oder } \int_0^t \sigma_{ij}^2(s, X_s) ds \geq n \text{ für ein Paar } i, j\}$. Da (X, W) eine schwache Lösung ist, gilt $\tau_n \uparrow \infty$ \mathbb{P} -f.s. Damit ist

$$M_{t \wedge \tau_n}^f = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma_{ij}(s, X_s) \frac{df}{dx_i}(s, X_s) dW_s^j$$

ein stetiges Martingal, d.h. $M^f \in \mathcal{M}^{c,loc}$.

Aus (*) folgt

$$\begin{aligned}
\langle M^f, M^g \rangle_t &= \sum_{i,k=1}^d \sum_{j,l=1}^r \int_0^t \sigma_{ij} \sigma_{kl} \frac{df}{dx_i} \frac{dg}{dx_k} d\langle W^j, W^k \rangle_s \\
&= \sum_{i,k=1}^d \int_0^t \underbrace{\sum_{j=1}^r \sigma_{ij} \sigma_{jk}}_{=a_{ik}} \frac{df}{dx_i} \frac{dg}{dx_k} ds.
\end{aligned}$$

Ist $f \in \mathcal{C}_0^{1,2}$ und gilt, dass $\sigma_{ij} |_{\text{supp } f}$ beschränkt ist, so sind die Integranden der M^{ij} beschränkt und damit ist $M^f \in \mathcal{M}_2^c$. \square

Bemerkung (Charakterisierung der BM):

Wähle $b \equiv 0$, $\sigma_{ij}(t, x) = \delta_{ij}$, so ist die Lösung der SDE die Brownsche Bewegung. Es gilt $A_t f(x) = A f(x) = \frac{1}{2} \Delta f$.

Insbesondere lässt sich zeigen, dass ein adaptierter, stetiger stochastischer Prozess W genau dann eine d -dimensionale BM ist, wenn $f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(W_s) ds$ ein stetiges lokales Martingal für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^2$ ist.

4.4.B. Schwache Lösung und Martingal-Problem

Notationen:

Seien $b_i, \sigma_{ij} : [0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ progressiv messbare Funktionale, $a_{ik}(t, y) = \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}(t, y) \sigma_{kj}(t, y)$ für alle $t \geq 0, y \in \mathcal{C}$ und

$$(A'_t u)(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^d a_{ik}(t, y) \frac{d^2 u}{dx_i dx_k}(y(t)) + \sum_{i=1}^d b_i(t, y) \frac{du}{dx_i}(y(t))$$

für $t \geq 0, u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), y \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d)$.

Definition 4.4.2 (Lokales Martingalproblem):

Ein W-Maß \mathbb{P} auf $(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d), \mathcal{B})$, unter dem $M_t^f := f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t (A'_s(f))(y) ds$ ein stetiges lokales Martingal für jedes $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ist, heißt Lösung des lokalen Martingalproblems zu $(A'_t)_t$.

Die in der Martingaleigenschaft geforderte Filtrierung ist \mathcal{F}_t mit $\mathcal{F}_t = G_{t+}$ für die Augmentierung $(G_t)_t$ unter \mathbb{P} der kanonischen Filtrierung $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^d))$.

In der obigen Aufgabe gilt die Proposition 4.2 auch, wenn A_t durch A'_t ersetzt wird. Dies induziert ein W-Maß \mathbb{P} wie in der Definition gefordert.

Satz 4.4.3:

Sei \mathbb{P} ein W-Maß auf $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$, unter dem M^f ein stetiges lokales Martingal ist für $f(x) = x_i$ und $f(x) = x_i x_k$ für alle i, k . Dann existiert eine r -dimensionale Brownsche Bewegung W und eine Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ auf einer Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ von $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mathbb{P})$ derart, dass mit $X_t(y) = y(t)$ (X, W) , $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ eine schwache Lösung der SDE $dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dW_t$ ist.

Beweis:

Angewendet auf $f(x) = x_i$ ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} M_t^i &:= X_t^i - X_0^i - \int_0^t \sum_{k=1}^d b_k(s, X) \underbrace{\frac{df(X_s)}{dx_k}}_{=\delta_{ik}} ds \\ &= X_t^i - X_0^i - \int_0^t b_i(s, X) ds \end{aligned}$$

ein CLM ist. Ebenso berechnet sich

$$M_t^{ik} = X_t^i X_t^k - X_0^i X_0^k - \int_0^t \left(X_s^k b_k(s, X) + X_s^i b_i(s, X) + a_{ik}(s, X) \right) ds$$

nach Wahl von $f(x) = x_i x_k$. Wir berechnen nun $\langle M^i, M^k \rangle$ zu $\int_0^t a_{ik}(s, X) ds$. Zu zeigen ist also, dass $Z_t := M_t^i M_t^k - \int_0^t a_{ik}(s, X) ds$ ein CLM ist. Dabei ist

$$Z_t^{ik} = M_t^{ik} - X_0^i M_t^k - X_0^k M_t^i + R_t,$$

wobei R_t den Rest bezeichne. Der erste Teil ist als Differenz dreier CLM ebenfalls ein CLM. Nun gilt

$$\begin{aligned}
R_t &= \int_0^t (X_s^i - X_t^i) b_k(s, X) ds + \int_0^t (X_s - X_t^k) b_i(s, X) ds + \left(\int_0^t b_i ds \right) \left(\int_0^t b_k ds \right) \\
&= \int_0^t (M_s^i - M_t^i) b_k ds + \int_0^t (M_s^k - M_t^k) b_i ds + \left(\int_0^t \dots \right) \left(\int_0^t \dots \right) \\
&\quad - \int_0^t \left(\int_s^t b_i(u, X) du \right) b_k(s, X) ds - \int_0^t \left(\int_s^t b_k(u, X) du \right) b_i(s, X) ds \\
&= \int_0^t (M_s^i - M_t^i) b_k(s, X) ds + \int_0^t (M_s^k - M_t^k) b_i(s, X) ds \\
&= \int_0^t \left(\int_0^s b_k(u, X) du \right) dM_s^i - \int_0^t \left(\int_0^s b_i(u, X) du \right) dM_s^k.
\end{aligned}$$

Dabei wurde einerseits verwendet, dass im dritten Schritt die ds -Integrale sich aufheben und nach Itô's Formel gilt mit $Y_t^1 = M_t^i, Y_t^2 = \int_0^t b_k(s, X) ds$

$$d(Y_t^1 Y_t^2) = Y_t^1 dY_t^2 + Y_t^2 dY_t^1 - t^1,$$

sodass gilt $M_t^i \int_0^t b_k ds = \int_0^t M_s^i b_k ds + \int_0^t \left(\int_0^s b_k(u, X) du \right) dM_s^i$. Daher folgt die Behauptung der Kovariation.

Nun ist $\langle M^i, M^k \rangle_t = \int_0^t a_{ik}(s, X) ds$ eine absolutstetige Funktion in t , sodass nach Theorem 3.4.2 gilt:

- i) Es existiert eine d -dimensionale BM \tilde{W} , $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ auf einer Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ von $(\mathcal{C}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, wobei \mathcal{F}_t die üblichen Bedingung erfüllt sowie
- ii) ein matrixwertiger Prozess $\rho = (\rho_{ij}(t))_{ij}$, welcher $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ -adaptiert ist, sodass für alle i, j, t $\tilde{\mathbb{P}}(\int_0^t \rho_{ij}^2 ds < \infty) = 1$ gilt, und es gilt

$$M_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t \rho_{ij}(s) d\tilde{W}_s^j \tilde{\mathbb{P}} - \text{f.s.}$$

Nach der Definition von M^i und ρ folgt also

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X) ds + \int_0^t \rho(s) d\tilde{W}_s.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass eine BM W auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ existiert mit $\int_0^t \rho(s) d\tilde{W}_s = \int_0^t \sigma(s, X) dW_s \tilde{\mathbb{P}} - \text{f.s.}$ Sobald dies gezeigt ist, sind wir fertig. Es bleiben noch die Integrabilitätsbedingungen von b und σ zu zeigen.

Für b : Da M^f ein CLM ist für $f(x) = x_i$, existiert also $\int_0^t \|b_i(s, X)\| ds$ f.s.

Für σ : Unter Beachtung von $\langle M^i, M^k \rangle_t = \int_0^t a_{ik} ds$ und $M_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t \rho_{ij}(s) d\tilde{W}_s^j$ gilt für alle i, k

$$\tilde{\mathbb{P}} \left(\sum_j \rho_{ij}(t) \rho_{kj}(t) = a_{ik}(t) \text{ für fast alle } t \geq 0 \right) = 1$$

indem man die Kovariation mit der zweiten Darstellung von M_t^i ausrechnet. Nun gilt $\tilde{\mathbb{P}}$ -f.s.

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma_{ij}^2 ds < \infty \quad \forall i, j &\Leftrightarrow \int_0^t \underbrace{\sum_{j=1}^r \sigma_{ij}^2}_{=a_{ii}} ds < \infty \quad \forall i \Leftrightarrow \int_0^t \sum_j \rho_{ij}^2 ds < \infty \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow \int_0^t \rho_{ij}^2 ds < \infty \quad \forall i, j, \end{aligned}$$

was nach Konstruktion von ρ_{ij} erfüllt ist.

Als letzten Schritt müssen wir die BM W wie gewünscht finden. Ohne Einschränkung sei $r = d$ (für $r > d$ setze $X_t^i, b_i(t, y) = 0$ für $i > d$ und $\sigma_{ij}(t, y) = 0$ für $i > d, j \leq r$ und für $r < d$ setze $\sigma_{ij}(t, y) = 0$ für $i \leq d, j > r$). Unter Ausnutzung der folgenden Aufgabe setze $W_t := \int_0^t R(\rho(s), \sigma(s, X))^T d\tilde{W}_s$, bzw. $W_t^i = \int_0^t \sum_\nu R_{i\nu}^T d\tilde{W}_s^\nu$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \langle W^i, W^j \rangle_t &= \sum_\mu \sum_\nu \int_0^t R_{\nu i} R_{\mu j} \underbrace{d\langle \tilde{W}^\nu, \tilde{W}^\mu \rangle_s}_{=\delta_{\mu,\nu} ds} \\ &= \int_0^t \underbrace{\sum_\nu R_{\nu,i} R_{\nu,j}}_{=(R^T R)_{ij} = \delta_{ij}} ds = \delta_{ij} t, \end{aligned}$$

sodass W nach Levys Charakterisierung eine BM ist. Zum Abschluss des Beweises beachte

$$\int_0^t \underbrace{\sigma}_{=\rho R} \underbrace{dW}_{=R^T d\tilde{W}} = \int_0^t \rho R R^T d\tilde{W} = \int_0^t \rho d\tilde{W}.$$

□

Aufgabe 4.4.4:

Es existiert eine Borel-messbare Funktion $R : D \rightarrow \mathbb{R}^{d^2}$ mit $D = \{(\rho, \sigma) : \rho, \sigma \in \mathbb{R}^{d^2}, \rho \rho^T = \sigma \sigma^T\}$, sodass $\sigma = \rho R(\rho, \sigma)$ und $R(\rho, \sigma) R(\rho, \sigma)^T = \text{Id}$.

Korollar 4.4.5:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) Es existiert eine Lösung \mathbb{P} zum lokalen Martingalproblem zur Operatorfamilie $(A_t^i)_t$.
- ii) Es existiert eine schwache Lösung $(X, W), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), (\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$ zur funktionalen SDE.

Die zwei Lösungen sind verbunden durch $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}} X^{-1}$, d.h. \mathbb{P} ist das Bildmaß auf $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$.

μ heißt Startverteilung zum lokalen Martingalproblem, falls $\mathbb{P}(y : y(0) \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$ für alle $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Korollar 4.4.6:

Es gilt die Eindeutigkeit der Lösung \mathbb{P} zum lokalen Martingalproblem zum gegebenen μ genau dann, wenn Eindeutigkeit im Sinne der Verteilung der schwachen Lösung vorliegt.

Definition 4.4.7 (Martingalproblem):

Ein W -Maß \mathbb{P} auf $(\mathcal{C}_d, \mathcal{B})$ heißt Lösung zum Martingalproblem zu $(A'_t)_t$, falls M^f ein stetiges Martingal für alle $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$ ist.

Gegeben $((A'_t)_t, \mu)$, betrachte die folgenden Bedingungen:

- (A): Es existiert eine schwache Lösung zu der funktionalen SDE mit Startverteilung μ .
- (B): Es existiert eine Lösung \mathbb{P} zum lokalen Martingalproblem zu $(A'_t)_t$ mit Startverteilung μ .
- (C): Es existiert eine Lösung \mathbb{P} zum Martingalproblem zu den obigen Daten.
- (A1): Für alle $T \in (0, \infty)$ existiert ein K_T , sodass $\|\sigma(t, y)\| \leq K_T$ für alle $t \geq 0, y \in \mathcal{C}$.
- (A2): Es gilt $\sigma_{ij}(t, y) = \tilde{\sigma}_{ij}(t, y(t))$ für alle i, j mit Borel-messbaren $\tilde{\sigma}_{ij} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, welche beschränkt auf kompakten Mengen sind.

Satz 4.4.8:

Es gilt $(A) \Leftrightarrow (B)$ sowie $(C) \Rightarrow (B)$. Ferner gilt $(A) \& (A1) \Rightarrow (C)$ und $(A) \& (A2) \Rightarrow (C)$.

4.4.C. Wohlgestelltheit und starke Markoff-Eigenschaft

Seien $b_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \sigma_{ij} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. zeithomogene Koeffizienten. Betrachte die SDE

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s, t \geq 0. \quad (\text{SDE})$$

Die Zeitabhängigkeit ist hierbei enthalten, indem man $X_t^{d+1} = t, b_{d+1}(x) = 1, \sigma_{d+1,j}(x) = 0$ wählt. Beachte dabei, dass es Resultate gibt, wo die Eigenwerte von $\sigma\sigma^T$ strikt größer 0 sein müssen, was hier nicht erfüllt ist.

Definition 4.4.9 (Wohlgestelltheit):

Die SDE ist wohlgestellt, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die SDE eine schwache Lösung hat, die eindeutig ist im Sinne der Verteilung.

Bemerkung:

Die SDE ist wohlgestellt, wenn b und σ Lipschitz-stetig sind und lineare Wachstumsbedingungen erfüllen, was aus Theorem 2.9 und 2.5 folgt (Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen).

Die SDE ist wohlgestellt, wenn $\Sigma(x) = Id$, und b uniform beschränkt ist (vgl. Proposition 3.6, Korollar 3.11).

Diese Bedingungen lassen sich noch weiter abschwächen.

Bemerkung:

Sei die SDE wohlgestellt. Dann existiert eine schwache Lösung $(X, W), \dots$ zur Anfangsbedingung $X_0 = x$, die ein W-Maß \mathbb{P}^x auf $(\mathcal{C}_d, \mathcal{B}(\dots))$. Ohne Einschränkung ist die schwache Lösung durch $X_t(\omega) = \omega(t)$ für $\omega \in \mathcal{C}_d$ gegeben.

Frage: Ist X mit $(\mathcal{B}_t)_t$ und $\{\mathbb{P}^x\}_x$ eine starke Markoffsche Familie?

Ziel: Ja, falls b, σ auf kompakten Mengen beschränkt sind.

Notationen:

Definiere

$$(Af)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^d a_{ik}(x) \frac{d^2}{dx_i dx_k}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{df}{dx_i}(x)$$

mit $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$.

Definition 4.4.10 (Zeithomogenes Martingalproblem):

Seien b_i, σ_{ij} beschränkt auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^d . Ein W-Maß \mathbb{P} auf (Ω, \mathcal{B}) mit $\Omega = \mathcal{C}_d, \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C}_d)$, unter dem

$$\mathbb{E} \left(f(y(t)) - f(y(s)) - \int_s^t (Af)(y(u)) du \mid \mathcal{B}_s \right) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $0 \leq s \leq t < \infty$ und alle $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ gilt, heißt Lösung des zeithomogenen Martingalproblems. Schreibe \mathbb{P}^x für eine beliebige Lösung dieses zeithomogenen Zeitproblems mit $\mathbb{P}^x(y \in \mathcal{C}_d : y(0) = x) = 1$.

Bemerkung 4.4.11:

In obiger Definition verwenden wir \mathcal{B}_s statt \mathcal{F}_s . Die Übung rechtfertigt, \mathcal{B}_t statt \mathcal{F}_t zu betrachten.

Bemerkung 4.4.12:

Unter den Annahmen der obigen Definition hat das zeithomogene Martingalproblem eine eindeutige Lösung für jede Anfangsbedingung x genau dann, wenn die SDE wohlgestellt ist (vgl. Korollar 4.8, 4.9, Proposition 4.11 in [KS10]).

Lemma 4.4.13:

Sei τ eine beschränkte $(\mathcal{B}_t)_t$ -Stoppzeit. Dann gilt $\mathcal{B}_\tau = \sigma(s \mapsto y(s \wedge \tau) : y \in \mathcal{C}_d)$.

Beweis:

Ohne Beweis. □

Satz 4.4.14:

Seien b, σ beschränkt auf kompakten Teilmengen und die SDE sei wohlgestellt. Dann gilt: Für jede $(\mathcal{B}_t)_t$ -Stoppzeit τ , $F \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt die starke Markoff-Eigenschaft:

$$\mathbb{P}^x \left(\Theta_\tau^{-1} F \mid \mathcal{B}_\tau \right) (\omega) = \mathbb{P}^{\omega(\tau)}(F) \quad \mathbb{P}^x -f.s. \text{ auf } \{\tau < \infty\}.$$

4.4.D. Fragen der Existenz

Satz 4.4.15 (Skorohod):

Seien b, σ beschränkt und stetig und betrachte die SDE

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \quad (\text{SDE})$$

Für jede Anfangsverteilung μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^{2m} \mu(dx) < \infty$ für ein $m > 1$ existiert eine schwache Lösung der SDE.

Beweis:

1. Schritt: Diskretisieren

Definiere $t_j^n = j \cdot 2^{-n}$ für $j \geq 0, n \geq 1$, $\psi_n(t) = t_j^n$ für $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n)$ und $b^n(t, y) := b(y(\psi_n(t)))$, $\sigma^n(t, y) = \sigma(y(\psi_n(t)))$. Dann sind b^n, σ^n progressiv messbare Funktionale. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer r -dimensionalen BM W mit Filtrierung $(\mathcal{F}_t^W)_t$ und einer Anfangsbedingung $\xi \sim \mu$. Definiere $X_t^n := X_{t_j^n}^n + b(X_{t_j^n}^n)(t - t_j^n) + \sigma(X_{t_j^n}^n)(W_t - W_{t_j^n})$ für $t \in (t_j^n, t_{j+1}^n]$, $j \geq 0$.

Dann löst X^n die funktionale SDE

$$X_t^n = \xi + \int_0^t b^n(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma^n(s, X_s^n)dW_s, t \geq 0.$$

Daraus folgt $\sup_n \mathbb{E} \|X_t^n - X_s^n\|^{2m} \leq C(1 + \mathbb{E} \|\xi\|^{2m}) |t - s|^m$ für $0 \leq s < t \leq T$, T fest, wobei $C = C_T$ nur von T, m, d und der Schranke an b, σ abhängen.

2. Schritt:

Definiere $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(X^n)^{-1}$ (W-Maß auf $(\mathcal{C}_d, \mathcal{B}(\mathcal{C}_d))$). Die Schranke aus Schritt 1 zeigt, dass $(\mathbb{P}^n)_n$ straff ist (vgl. Problem 2.4.11, Bemerkung 2.4.13). Nach Prohorovs Theorem (Theorem 2.4.7) ist straff äquivalent zu relativ kompakt auf polnischen Räumen. Nach Auswahl einer Teilteilstoffe kann man annehmen, dass $\mathbb{P}^n \Rightarrow \mathbb{P}^*$ für ein W-Maß \mathbb{P}^* .

3. Schritt:

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*(y(0) \in \Gamma) &= \mu(\Gamma) \\ \mathbb{E}^* \left(f(y(t)) - f(y(s)) - \int_s^t (Af)(y(u)) | \mathcal{B}_s \right) &= 0 \quad \mathbb{P}^* \text{-f.s.} \end{aligned}$$

für $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ gilt. Dann sind wir gemäß Proposition 4.11 und Problem 4.13 fertig.

Zu a): Es gilt

$$\mathbb{E}^* f(y(0)) = \lim_n \mathbb{E}^n f(y(0)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx).$$

Zu b): $f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t (A_u^n f)(y) du$ mit

$$(A_t^n f)(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^d \sum_{j=1}^n \left(\sigma_{ij}^n \sigma_{kj}^n(t, y) \right) \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(y(t)) + \sum_{i=1}^d b_i^n(t, y) \frac{df}{dx_i}(y(t))$$

ist ein $(\mathcal{B}_t)_t$ -Martingal unter \mathbb{P}^n für jedes $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Aus der Martingaleigenschaft folgt

$$\mathbb{E}^n (F_n(y)g(y)) = 0$$

für $F_n(y) = f(y(t)) - f(y(0)) - \int_s^t (A_u^n f)(y) du$, $0 \leq s < t < \infty$, $g : \mathcal{C}_d \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, stetig und \mathcal{B}_s -messbar.

Zeige als nächstes, dass für festes $s < t$ konvergiert $(F_n(y))_n$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{C}_d gegen $F(y) = \lim_n F_n(y)$. Wenn dies gezeigt ist, folgt $\mathbb{E}^*(F(y)g(y)) = 0$ für alle g wie oben und damit b .

Schritt 4: Gleichmäßige Konvergenz

Sei $K \subset \mathcal{C}_d$, dann ist nach Satz 2.4.9 K genau dann, wenn $M := \sup_{0 \leq u \leq t, y \in K} \|y(u)\| < \infty$ und $\lim_n \sup_{y \in K} m^t(y, \frac{1}{2^n}) = 0$. Sei K kompakt. Auf $\{x : \|x\| \leq M\}$ sind b, σ gleichmäßig stetig. Daher existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{0 \leq s \leq t, y \in K} (\|b^n(s, y) - b(y(s))\| + \|\sigma^n(s, y) - \sigma(y(s))\|) \leq \varepsilon.$$

Also gilt $F_n \rightarrow F$ gleichmäßig auf K . □

Bemerkung 4.4.16:

Der Beweis kann modifiziert werden, falls $b = b(t, x)$ und $\sigma = \sigma(t, x)$ beschränkt und stetig, oder b, σ beschränkte, stetige, progressiv messbare Funktionale.

Der Satz ist äquivalent zum Martingalproblem, da $\|\sigma(t, y)\| \leq K_T$ nach Voraussetzung gilt.

4.4.E. Fragen der Eindeutigkeit

Definition 4.4.17:

Eine Klasse \mathcal{D} von Borel-messbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt determining class, wenn für je zwei endliche Maße μ_1, μ_2 auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\int \varphi(x) \mu_1(dx) = \int \varphi(x) \mu_2(dx) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \implies \mu_1 = \mu_2.$$

Aufgabe 4.4.18:

$\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist eine determining class.

Satz 4.4.19 (Strook und Varadhan, Dualität von Cauchy und Martingalproblem):

Wenn für jede Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Au && \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \cdot) &= f && \text{in } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

eine Lösung $u_f \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ existiert, welche auf jedem Streifen $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ beschränkt ist, so gilt die Eindeutigkeitsaussage: Das zeithomogene Martingalproblem hat höchstens eine Lösung \mathbb{P}^x für jedes $x \in \mathbb{R}^d$.

Beweis:

Angenommen $\mathbb{P}^x, \tilde{\mathbb{P}}^x$ sind zwei Lösungen des homogenen Martingalproblems. Es genügt zu zeigen, dass die Randverteilungen übereinstimmen. Sei $0 \leq t_1 < \dots < t_n < \infty$ und zeige, dass

$$\mathbb{P}^x(\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_n})^{-1} = \tilde{\mathbb{P}}^x(\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_n})^{-1}.$$

Zeige dies per Induktion über n . Für $n = 1$ ist nach Lemma 4.26 zu zeigen, dass $\mathbb{P}^x(y(T) \in \Gamma) = \tilde{\mathbb{P}}^x(y(T) \in \Gamma)$ für alle $0 \leq T < \infty, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Für festes $T > 0$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiere $g(t, x) := u_f(T - t, x)$. g erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= -Ag && \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ g(0, \cdot) &= f && \text{in } \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Nach Korollar 4.8 existiert eine Brownsche Bewegung W auf einer Erweiterung von $(\mathcal{C}_d, \mathcal{B}(\mathcal{C}_d), \mathbb{P}^x)$, sodass der Koordinatenprozess $X_t(y) = y(t)$ auf \mathcal{C}_d unter \mathbb{P}^x eine schwache Lösung der SDE $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ ist. Nach Proposition 4.1 gilt für $t \leq T$, dass $M_t^g := g(t, y(t)) - g(0, x) - \int_0^t \left(\frac{dg}{ds} + Ag \right)(s, y(s)) \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathbb{P}^x)$. Da g eine Lösung des Cauchy-Problems ist, ist der Integrand 0. Daraus folgt, dass $(g(t, y(t)), \mathcal{B}_t, 0 \leq t \leq T)$ ein lokales Martingal unter \mathbb{P}^x und $\tilde{\mathbb{P}}^x$ ist. Da g beschränkt und stetig ist, ist $g(t, y(t))$ auch ein Martingal unter \mathbb{P}^x und $\tilde{\mathbb{P}}^x$.

Daraus folgt

$$\mathbb{E}^x f(y(T)) = \mathbb{E} g(T, y(T)) = g(0, x) = \tilde{\mathbb{E}}^x g(T, y(T)) = \tilde{\mathbb{E}}^x f(y(T))$$

für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}$. Also gilt $\mathbb{P}^x \pi_T^{-1} = \tilde{\mathbb{P}}^x \pi_T^{-1}$.

Für den Induktionsschritt nutze Proposition 4.27. Definiere $G_n := \sigma(y(t_1), \dots, y(t_n))$. Es ist zu zeigen, dass $\mathbb{P}^x = \tilde{\mathbb{P}}^x$ auf G_n .

Sei $Q_\omega^x(F) = \mathbb{P}^x(F | G_{n-1})(\omega)$ die reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit für $\mathcal{B}(C_d)$ gegeben G_{n-1} . Nach Lemma 4.19 existiert eine Nullmenge $N \in G_{n-1}$, sodass für alle $\omega \notin N$ und $T = t_{n-1}$ $\mathbb{P}_\omega^x = Q_\omega^x \circ \theta_{t_{n-1}}^{-1}$ ist eine Lösung des Martingalproblems mit Start in $x' = \omega(t_{n-1})$. Analog für $\tilde{\mathbb{P}}^x$ mit Nullmenge \tilde{N} . Dann gilt für $\omega \notin \cup \tilde{N}$ aus dem eindimensionalen Fall $n = 1$ mit $x' = \omega(t_{n-1})$, dass \mathbb{P}_ω^x und $\tilde{\mathbb{P}}_\omega^x$ die gleichen eindimensionalen Randverteilungen haben.

Nun gilt für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d(n-1)})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x \left(\underbrace{((y_{t_1}, \dots, y_{t_{n-1}}) \in A)}_{=: F_{n-1}}, \underbrace{y(t_n) \in B}_F \right) &= \mathbb{E}^x (\mathbb{1}_{F_{n-1}} \cdot \mathbb{1}_F) \\
&= \mathbb{E}^x (\mathbb{1}_{F_{n-1}} \mathbb{E}^x (\mathbb{1}_F | G_{n-1})) \\
&= \int_{C_d} \mathbb{1}_{F_{n-1}} \cdot \mathbb{E}^x (\mathbb{1}_F | G_{n-1})(\omega) \mathbb{P}^x(d\omega) \\
&= \int_{C_d} \mathbb{1}_{F_{n-1}} \cdot \mathbb{P}_\omega^x(y(t_n) - y(t_{n-1}) \in B) \mathbb{P}^x(d\omega) \\
&= \int_{C_d} \mathbb{1}_{F_{n-1}} \cdot \tilde{\mathbb{P}}_\omega^x(y(t_n) - y(t_{n-1}) \in B) \mathbb{P}^x(d\omega) \\
&= \int_{C_d} \mathbb{1}_{F_{n-1}} \cdot \tilde{\mathbb{E}}^x(\mathbb{1}_F | G_{n-1}) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{C_d} \mathbb{1}_{F_{n-1}} \cdot \tilde{\mathbb{E}}^x(\mathbb{1}_F | G_{n-1}) \tilde{\mathbb{P}}(d\omega) \\
&= \tilde{\mathbb{P}}^x ((y(t_1), \dots, y(t_{n-1})) \in A, y(t_n) \in B)
\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x (\mathbb{1}_F | G_{n-1}) &= \mathbb{P}^x(F | G_{n-1})(\omega) = Q_\omega^x(F) = Q_\omega^x \circ \theta_{t_{n-1}}^{-1}(\theta_{t_{n-1}}(F)) \\
&= \mathbb{P}_\omega^x(y(t_n) - y(t_{n-1}) \in B).
\end{aligned}$$

□

Korollar 4.4.20:

Seien b, σ beschränkte, stetige Funktionen, sodass für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine Lösung u_f zum Cauchy-Problem wie im obigen Theorem existiert. Dann ist das zeithomogene Martingalproblem wohlgestellt.

4.4.F. Infinitesimaler Generator und die Dynkin-Formel

Betrachte die zeithomogene SDE mit Start in x

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, X_0 = x.$$

(X_t heißt auch Itô-Diffusion) und den zugehörigen Differentialoperator

$$Lf(x) = \sum_i b_i(x) \frac{df}{dx_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(x) \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(x), f \in \mathcal{C}^2.$$

Seien b, σ beschränkt auf kompakten Teilmengen und so, dass das (lokale) Martingalproblem zu L wohlgestellt ist.

Definition 4.4.21 (Infinitesimaler Generator):

Der (infinitesimale) Generator A der Itô-Diffusion X im \mathbb{R}^d ist definiert durch

$$Af(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(f(X_t)) - f(x)}{t}.$$

Die Menge aller Funktionen f , für die der Limes für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert ist, bezeichnet man mit \mathcal{D}_A .

Satz 4.4.22:

Es gilt $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}_A$ und für $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$Af(x) = Lf(x) = \sum_i b_i(x) \frac{df}{dx_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(x) \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(x).$$

Beweis:

Sei $f \in \mathcal{C}_0^2$, so gilt nach Proposition 5.4.2, dass $M_t^f = f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds \in \mathcal{M}^{c,loc}$. Da σ beschränkt auf dem kompakten Träger von f ist, gilt $M^f \in \mathcal{M}^c$. Also gilt $\mathbb{E}^x(M_t^f) = \mathbb{E}^x(M_0^f) = 0$. Dies bedeutet aber

$$\mathbb{E}^x(f(X_t)) - f(x) = \mathbb{E}^x \left(\int_0^t Lf(X_s)ds \right) = \int_0^t \mathbb{E}^x(Lf(X_s))ds,$$

woraus

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(f(X_t)) - f(x)}{t} = \mathbb{E}^x(Lf(X_0)) = Lf(x)$$

folgt. □

Satz 4.4.23 (Dynkin-Formel):

Sei $f \in \mathcal{C}_0^2$. Angenommen τ ist eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}^x \tau < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{E}^x(f(X_\tau)) = f(x) + \mathbb{E}^x \left(\int_0^\tau Lf(X_s)ds \right).$$

Beweis:

Wie oben folgt $M^f \in \mathcal{M}^c$ und wegen $\mathbb{E}^x \tau < \infty$ folgt aus dem OST

$$\mathbb{E}^x(M_\tau^f) = \mathbb{E}^x(M_0^f) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung:

Wenn τ die Erstaustrittszeit aus einer beschränkten Menge ist und $\mathbb{E}^x \tau < \infty$ gilt, dann gilt die Dynkin-Formel für alle $f \in \mathcal{C}^2$.

Definition 4.4.24 (Charakteristischer Operator):

Der charakteristische Operator \mathcal{A} einer Itô Diffusion X ist definiert durch

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbb{E}^x(f(X_{\tau_U})) - f(x)}{\mathbb{E}^x(\tau_U)}$$

wo U_k offene Mengen sind, die gegen x absteigend sind und τ_U die Erstaustrittszeit von X aus U bezeichnet. Gilt $\mathbb{E}^x(\tau_U) = \infty$ für alle offenen $U \ni x$, so definieren wir $\mathcal{A}f(x) = 0$. Die Menge der Funktionen, sodass der Limes für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_\mathcal{A}$.

Satz 4.4.25:

Es gilt $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_\mathcal{A}$ sowie $Af = \mathcal{A}f$ für alle $f \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$, wobei A den infinitesimalen Generator von X bezeichnet.

Beweis:

Dynkin 1965 I, Seite 143. □

Definition 4.4.26 (Falle):

Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ heißt Falle für die Itô Diffusion X , wenn $\mathbb{P}^x(\{X_t = x \ \forall t\}) = 1$, d.h. dann und genau dann, wenn $\tau_{\{x\}} = \infty$ \mathbb{P}^x -f.s.

Satz 4.4.27:

Wenn x keine Falle ist, dann existiert eine offene Umgebung U , sodass $\mathbb{E}^x \tau_U < \infty$.

Beweis:

Dynkin 1965 I, Seite 139. □

Satz 4.4.28:

Es gilt $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}_\mathcal{A}$ und für diese Funktionen f gilt

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_i b_i(x) \frac{df}{dx_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(x) \frac{d^2 f}{dx_i dx_k}(x).$$

Beweis:

Sei $f \in \mathcal{C}^2$, $x \in \mathbb{R}^d$. Falls x keine Falle ist, so wähle eine offene Umgebung $U \ni x$, sodass $\mathbb{E}^x \tau_U < \infty$. OE sei U beschränkt. Nach der Dynkin-Formel und der Bemerkung gilt

$$\mathbb{E}^x(f(X_\tau)) = f(x) + \mathbb{E}^x \left(\int_0^\tau Lf(X_s) ds \right).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbb{E}^x(f(X_{\tau_U})) - f(x)}{\mathbb{E}^x \tau_U} - Lf(x) \right| &= \left| \frac{\mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_U} Lf(X_s) ds \right)}{\mathbb{E}^x \tau_U} - Lf(x) \right| \\ &= \left| \frac{\mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_U} Lf(X_s) - Lf(x) ds \right)}{\mathbb{E}^x \tau_U} \right| \leq \sup_{y \in U} |Lf(x) - Lf(y)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $U \downarrow x$, da Lf eine stetige Funktionen ist.

Ist x eine Falle, so gilt $\mathbb{E}^x \tau_U = \infty$ für alle offenen Umgebungen $U \ni x \Rightarrow Af(x) = 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass $Lf(x) = 0$. Wähle eine beschränkte offene Umgebung $V \ni x$.

Modifiziere f zu f_0 außerhalb von V , sodass $f_0 \in \mathcal{C}_0^2$. Dann gilt

$$Lf(x) = Lf_0(x) = Af_0(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x f_0(X_t) - f(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f_0(x) - f(x)}{t} = 0.$$

□

Satz 4.4.29 (Kolmogorovs Rückwärtsgleichung):

Sei $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

a) Für $u(t, x) := \mathbb{E}^x(f(X_t))$ gilt $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}_A$ für jedes t und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Au \text{ in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \cdot) &= f \text{ in } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

b) Ist $w(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung des Cauchy-Problems, welche beschränkt auf jedem $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ ist, so gilt $w(t, x) = \mathbb{E}^x(f(X_t))$.

Beweis:

a) Es gilt aufgrund der Markov-Eigenschaft von X

$$\begin{aligned} Au(t, x) &= \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(u(t, X_r)) - u(t, x)}{r} = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x \left(\mathbb{E}^{X_r} f(X_t) \right) - u(t, x)}{r} \\ &= \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x \left(\mathbb{E}^x(f(X_{t+r} | \mathcal{F}_r)) - u(t, x) \right)}{r} = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x f(X_{t+r}) - u(t, x)}{r} \\ &= \lim_{r \downarrow 0} \frac{u(t+r, x) - u(t, x)}{r} = \frac{du}{dt}. \end{aligned}$$

b) Für festes $(T, x) \in \mathbb{R}^{d+1}$ definiere einen Prozess Y in \mathbb{R}^{d+1} via

$$Y_t := (T - t, X_t),$$

d.h. $Y_t^0 := T - t = T + \int_0^t (-1) ds$. Dann hat Y den Generator \tilde{A} , welcher auf $v \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^{d+1})$ gegeben ist durch $\tilde{A}v = -\frac{dv}{dt} + Av$. Insbesondere haben wir $\tilde{A}w(t', x) = 0$ für $t' > 0, x \in \mathbb{R}^d$. Sei $\tau_R := \inf\{t > 0 : |X_t| \geq R\}$. Dann ist $Y_{t \wedge \tau_R} \in (0, T] \times [-R, R]^d$ für $0 \leq t < T$. Schließlich gilt mit der Dynkin-Formel

$$\mathbb{E}^x(w(Y_{t \wedge \tau_R})) = w(T, x) + \mathbb{E}^x \left(\int_0^{t \wedge \tau_R} \tilde{A}w(Y_{s \wedge \tau_R}) ds \right) = w(T, x)$$

für $R > 0, 0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^d$. Die linke Seite konvergiert für $R \rightarrow \infty$ zu $\mathbb{E}^x(w(Y_t))$ nach majorisierter Konvergenz und für $t \uparrow T$ gegen $\mathbb{E}^x w(Y_T)$ wegen der Stetigkeit. Also gilt

$$w(T, x) = \mathbb{E}^x w(Y_T) = \mathbb{E}^x(w(0, X_T)) = \mathbb{E}^x f(X_T).$$

□

Beispiel 4.4.30 (Graph einer Brownschen Bewegung):

Betrachte die SDE im \mathbb{R}^2 mit $dX_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dW_t, X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wo W_t eine eindimensionale BM ist. Dann ist $X_t = \begin{pmatrix} t \\ W_t \end{pmatrix}$ interpretierbar als der Graph einer eindimensionalen BM. Berechne den Generator auf $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^2)$:

$$Af(x) = \mathcal{A}f(x) = Lf(x) = Lf(t, x_2) = \frac{df}{dt}(x) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx_2 dx_2}(x).$$

Damit lässt sich die Zeit integrieren in das zeithomogene Setting.

4.4.G. Das kombinierte Dirichlet-Poisson Problem

Betrachte die zeithomogene SDE mit Start in x wie im vorherigen Kapitel. Seien die Voraussetzung der Wohlgestelltheit gegeben und b, σ beschränkt auf kompakten Mengen. Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, zusammenhängende Menge.

Dann ist das Dirichlet-Problem gegeben durch: Sei $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$. Finde ein $u \in \mathcal{C}^2(D)$, sodass

$$\begin{aligned} Lu &= 0 && \text{in } U \\ \lim_{x \rightarrow y, x \in D} u(x) &= \varphi(y) && \text{für jedes } y \in \partial D. \end{aligned}$$

Das Poisson-Problem: Sei $g \in \mathcal{C}(D)$. Finde ein $v \in \mathcal{C}^2(D)$, sodass

$$\begin{aligned} Lv &= -g && \text{in } D \\ \lim_{x \rightarrow y, x \in D} v(x) &= 0 && \text{für alle } y \in \partial D. \end{aligned}$$

Das kombinierte Dirichlet-Poisson-Problem ist die Kombination der Probleme:

$$\begin{aligned} Lv &= -g && \text{in } D \\ \lim_{x \rightarrow y, x \in D} v(x) &= \varphi(y) && \text{für alle } y \in \partial D \end{aligned}$$

Falls u, v das Dirichlet und das Poisson-Problem respektive lösen, so löst $w = u + v$ das kombinierte Problem. Dabei ließe sich die zweite Bedingung modifizieren zu $(ii)_s : \lim_{t \uparrow \tau_D} w(X_t) = \varphi(X_{\tau_D}) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_D < \infty\}}$ \mathbb{P}^x -f.s. für alle $x \in D$. Für $\tau_D < \infty$ gilt \mathbb{P}^x -f.s. $(ii) \Rightarrow (ii)_s$. Also ist das stochastische Poisson-Dirichlet-Problem gegeben durch: Seien $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Finde ein w , sodass

$$\begin{aligned} Aw &= -g \text{ in } D \\ \lim_{t \uparrow \tau_D} w(X_t) &= \varphi(X_{\tau_D}) \mathbb{1}_{\{\tau_D < \infty\}} \mathbb{P}^x \text{-f.s.} \end{aligned}$$

Satz 4.4.31 (Eindeutigkeit für das kombinierte Problem):

Angenommen $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$ ist beschränkt und $g \in \mathcal{C}(D)$ erfüllt $\mathbb{E}^x (\int_0^{\tau_D} |g(X_t)| dt) < \infty$ für $x \in D$. Angenommen $w \in \mathcal{C}^2(D)$ ist eine beschränkte Lösung von (i) und (ii). Dann gilt

$$w(x) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_{\tau_D}) \mathbb{1}_{\{\tau_D < \infty\}}) + \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} g(X_t) dt \right).$$

Beweis:

Sei $(D_k)_k$ eine Folge von aufsteigenden offenen Menge D_k mit $D_k \subset D$ mit $D = \cup_{k=1}^{\infty} D_k$. Definiere $\alpha_k := k \wedge \tau_{D_k}$. Dann gilt wegen der Dynkin-Formel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x (w(X_{\alpha_k})) &= w(x) + \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\alpha_k} Lw(X_t) dt \right) \\ \Rightarrow w(x) &= \mathbb{E}^x (w(X_{\alpha_k})) + \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\alpha_k} g(X_t) dt \right). \end{aligned}$$

Es gilt $\alpha_k \rightarrow \tau_D$ für $k \rightarrow \infty$, sodass nach $(ii)_s$ gilt $w(X_{\alpha_k}) \rightarrow \varphi(X_{\tau_D}) \mathbb{1}_{\{\tau_D < \infty\}}$ \mathbb{P}^x -f.s. Ebenfalls gilt $\int_0^{\alpha_k} g(X_t) dt \rightarrow \int_0^{\tau_D} g(X_t) dt$ \mathbb{P}^x -f.s. Da w beschränkt ist, gilt auch $\mathbb{E}^x(w(X_{\alpha_k})) \rightarrow \mathbb{E}^x(\varphi(X_{\tau_D}) \mathbb{1}_{\{\tau_D < \infty\}})$ und wegen $|\int_0^{\alpha_k} g(X_t) dt| \leq \int_0^{\tau_D} |g(X_t)| dt$, was \mathbb{P}^x -integrierbar ist nach Voraussetzung, folgt nach Lebesgue die Aussage. \square

Korollar 4.4.32 (Eindeutigkeit für endliche Austrittszeiten):

Angenommen $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$ ist beschränkt und $g \in \mathcal{C}(D)$ erfüllt $\mathbb{E}^x(\int_0^{\tau_D} |g(X_t)| dt) < \infty$ für $x \in D$. Angenommen $\tau_D < \infty$ \mathbb{P}^x -f.s. Angenommen $w \in \mathcal{C}^2(D)$ ist eine beschränkte Lösung von (i) und (ii). Dann gilt

$$w(x) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_{\tau_D})) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^{\tau_D} g(X_t) dt\right).$$

Betrachte nun das Dirichlet-Problem. Betrachte den Prozess $X_t = X_0 + \binom{t}{0}$. Sei $D = ((0, 1) \times (0, 1)) \cup ((0, 2) \times (0, 1/2))$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$, sodass $\varphi = 0$ auf $\{0\} \times [0, 1]$, $\varphi = 1$ auf $\{1\} \times [1/2, 1]$, $\varphi = 0$ auf $\{2\} \times [0, 1/2]$. Definiere

$$u(x) := \mathbb{E}^x \varphi(X_{\tau_D}) = \begin{cases} 0 & x_2 \in (0, 1/2) \\ 1 & x_2 \in (1/2, 1) \end{cases}$$

sodass u nicht einmal stetig ist. Ferner erfüllt u die Bedingung (ii) nicht.

Von nun an betrachte das stochastische Dirichlet Problem, und $\tau_D < \infty$ \mathbb{P}^x -f.s. gilt.

Definition 4.4.33 (X -harmonisch):

Eine lokalbeschränkte, messbare Funktion u auf D heißt X -harmonisch in D , falls

$$u(x) = \mathbb{E}^x(u(X_{\tau_U}))$$

für alle $U \subset D$.

Für $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ messbar finde eine Funktion u , sodass

$(i)_s$ u ist X -harmonisch in D .

$(ii)_s$ $\lim_{t \uparrow \tau_D} u(X_t) = \varphi(X_{\tau_D})$ \mathbb{P}^x -f.s. für alle $x \in D$.

Für $u \in \mathcal{C}^2(D)$ ist $(i)_s$ äquivalent zu $\mathcal{A}u = 0$ in D .

Satz 4.4.34 (Lösung eines stochastischen Dirichlet-Problems):

Angenommen $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine beschränkte, messbare Funktion. Dann gelten:

- a) *Eindeutigkeit:* Angenommen u ist beschränkte Lösung von $(i)_s$ und $(ii)_s$. Dann gilt $u(x) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_{\tau_D}))$.
- b) *Existenz:* Definiere $u(x) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_{\tau_D}))$. Dann löst u das stochastische Dirichlet-Problem.

Lemma 4.4.35:

Es gilt:

- i) Ist u X -harmonisch in D , so gilt $\mathcal{A}u = 0$ in D .
 ii) Ist $\mathcal{A}u = 0$ in D und $u \in \mathcal{C}^2(D)$, so ist u X -harmonisch in D .

Beweis:

a) Nach Definition gilt

$$\mathcal{A}u(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbb{E}^x(u(X_{\tau_U})) - u(x)}{\mathbb{E}^x(\tau_U)} = 0.$$

b) Sei U eine beschränkte Menge mit $\bar{U} \subset D$. Da u beschränkt auf der kompakten Menge $\bar{U} \subset D$ ist, gilt mit Hilfe von Dynkins Formel

$$\mathbb{E}^x(u(X_{\tau_U})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x(u(X_{\tau_U \wedge k})) = u(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_U \wedge k} Lu(X_s) ds \right) = u(x),$$

da $Lu(X_s) = \mathcal{A}u(X_s) = 0$.

□

Lemma 4.4.36 (Mittelwerteigenschaft):

Sei $u(x) := \mathbb{E}^x \varphi(X_{\tau_D})$. Dann erfüllt u die Mittelwerteigenschaft bezüglich des harmonischen Maßes μ_D^x :

$$u(x) = \int_{\delta U} u(y) \mu_U^x(dy)$$

für alle $x \in D$ und beschränkte, offene Mengen U mit $\bar{U} \subset D$.

Beweis:

Es gilt für $U \subset D$ mit $\bar{U} \subset D$ $\varphi(X_{\tau_D}) = \varphi(X_{\tau_D}) \circ \theta_{\tau_U}$. Also folgt mit Hilfe der starken Markoff-Eigenschaft und dem Transformationsatz

$$\begin{aligned} u(x) &:= \mathbb{E}^x \varphi(X_{\tau_D}) = \mathbb{E}^x \varphi(X_{\tau_D}) \circ \theta_{\tau_U} = \mathbb{E}^x (\mathbb{E}^x (\varphi(X_{\tau_D}) \circ \theta_{\tau_U} | \mathcal{F}_{\tau_U})) \\ &= \mathbb{E}^x (\mathbb{E}^{X_{\tau_U}} \varphi(X_{\tau_D})) = \int_{\Omega} \mathbb{E}^{X_{\tau_U}(\omega)} \varphi(X_{\tau_D}) \mathbb{P}^x(d\omega) = \int_{\delta U} \mathbb{E}^y \varphi(X_{\tau_D}) \mu_U^x(dy) \\ &= \int_{\delta U} u(y) \mu_U^x(dy). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4.37 (Konstruktion einer X -harmonischen Funktion):

Sei $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare Funktion und definiere $u(x) := \mathbb{E}^x \varphi(X_{\tau_D})$. Dann ist u X -harmonisch in D .

Beweis:

Sei U beschränkt und offen mit $\bar{U} \subset D$. Dann genügt u der Mittelwerteigenschaft, d.h.

$$u(x) = \int_{\delta U} u(y) \mathbb{P}^x X_{\tau_U}^{-1}(dy) = \mathbb{E}^x u(X_{\tau_U}).$$

□

Beweis der Lösung des stochastischen Dirichlet-Problems:

Sei $(D_k)_k$ eine aufsteigende Folge von offenen Mengen D_k mit $D_k \subset\subset D$ und $D = \cup_{k=1}^{\infty} D_k$.

a) Da u eine Lösung ist, ist u X -harmonisch in D . Also gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$u(x) = \mathbb{E}^x u(X_{\tau_{D_k}}) \rightarrow \mathbb{E}^x \varphi(X_{\tau_D}),$$

denn nach $(ii)_s$ gilt $u(X_{\tau_{D_k}}) \rightarrow \varphi(X_{\tau_D})$ \mathbb{P}^x -f.s., wobei die Beschränktheit von u eingeht.

b) Nach obigem Lemma ist u X -harmonisch in D , woraus sofort $(i)_s$ folgt.

Für $(ii)_s$ ist $u(X_{\tau_{D_k}}) = \mathbb{E}^{X_{\tau_{D_k}}} \varphi(X_{\tau_D}) = \mathbb{E}^x \left(\varphi(X_{\tau_D}) \circ \theta_{\tau_{D_k}} \mid \mathcal{F}_{\tau_{D_k}} \right)$ wegen der starken Markoff-Eigenschaft. Nun gilt erneut $\varphi(X_{\tau_D}) \circ \theta_{\tau_{D_k}} = \varphi(X_{\tau_D})$. Definiere

$$\begin{aligned} M_k &:= u(X_{\tau_{D_k}}) = \mathbb{E}^x \left(\varphi(X_{\tau_D}) \mid \mathcal{F}_{\tau_{D_k}} \right) = \mathbb{E}^x(Y \mid G_k) \\ N_t &:= u(X_{\tau_{D_k} \vee (t \wedge \tau_{D_{k+1}})}) = \mathbb{E}^x \left(\varphi(X_{\tau_D}) \mid \mathcal{F}_{\tau_{D_k} \vee (t \wedge \tau_{D_{k+1}})} \right) \end{aligned}$$

Nun ist M_k ein beschränktes, zeitdiskretes G_k -Martingal, woraus nach dem Martingalkonvergenzsatz $M_k \rightarrow \varphi(X_{\tau_D})$ \mathbb{P}^x -f.s. und in $\mathcal{L}^p(\mathbb{P}^x)$ für alle $p < \infty$ gilt.

Analog dazu ist N_t ein stetiges G_t -Martingal, wobei $G_t := \mathcal{F}_{\tau_{D_k} \vee (t \wedge \tau_{D_{k+1}})}$. Nach der Doobschen Maximalungleichung gilt für alle $T > 0$

$$\mathbb{P}^x \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |N_t - N_0| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}^x \left((N_t - N_0)^2 \right),$$

woraus folgt

$$\mathbb{P}^x \left(\sup_{\tau_{D_k} \leq r \leq \tau_{D_{k+1}}} |u(X_r) - u(X_{\tau_{D_k}})| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}^x \left((u(X_{\tau_{D_{k+1}}}) - u(X_{\tau_{D_k}}))^2 \right) \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$ für alle $\varepsilon > 0$ wegen der \mathcal{L}^2 -Konvergenz. Definiere

$$Z^k := \sup_{\tau_{D_k} \leq r \leq \tau_{D_{k+1}}} |u(X_r) - u(X_{\tau_{D_k}})|,$$

so gilt $Z^k \rightarrow 0$ in Wahrscheinlichkeit, sodass eine Teilfolge $Z^{k_l} \rightarrow 0$ \mathbb{P}^x -f.s. konvergiert. Ohne Einschränkung seien die D_k bereits so gewählt, dass $Z^k \rightarrow 0$ f.s. gilt. Sei $t_n \uparrow \tau_D(\omega)$ und $k(n)$ so gewählt, dass $t_n \in [\tau_{D_{k(n)}}, \tau_{D_{k(n)+1}})$, so gilt $k(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Abschließend gilt nun wegen den Voraussetzungen

$$|u(X_{t_n}) - \varphi(X_{\tau_D})| \leq \underbrace{u(X_{t_n}) - u(X_{\tau_{D_{k(n)}}})}_{\leq Z^{k(n)} \rightarrow 0} + \underbrace{|u(X_{\tau_{D_{k(n)}}}) - \varphi(X_{\tau_D})|}_{\rightarrow 0}$$

für $n \rightarrow \infty$, woraus die Behauptung folgt.

□

Wir wissen, dass die universelle Filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t$ rechtsstetig ist, da der Prozess mit \mathbb{P}^x eine starke Markoff-Familie ist (vgl. Korollar 2.7.8 in [KS10]). Also gilt analog zu Theorem 2.7.17

Satz 4.4.38 (Null-Eins-Gesetz):

Für $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$ $\mathbb{P}^x(F) \in \{0, 1\}$.

Als Korollar folgt insbesondere für Erstaustrittszeiten aus der offenen Menge D

Korollar 4.4.39:

Es gilt $\mathbb{P}(\tau_D = 0) \in \{0, 1\}$ für alle y in \mathbb{R}^d .

Definition 4.4.40 (Reguläre Punkte):

Ein Punkt $y \in \partial D$ heißt regulärer Punkt zu D (bzgl. $(X_t)_t$), falls $\mathbb{P}^y(\tau_D = 0) = 1$ und irregulärer Punkt, falls $\mathbb{P}^y(\tau_D = 0) = 0$.

Beispiel 4.4.41 (Wiener-Kriterium):

Sei $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ der offene Einheitskreis und W eine zweidimensionale BM. Sei $\{\Delta_n\}$ eine Folge offener, disjunkter Scheiben in Δ mit Mittelpunkt in $(2^{-n}, 0)$ mit Radius r_n . Definiere $D := \Delta \setminus (\bigcup_{n \geq 1} \Delta_n)$. Dann sind alle Punkte von $\partial \Delta$ und $\partial \Delta_n$ regulär zu D . Der Nullpunkt ist genau dann regulär, wenn gilt

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{\log \frac{1}{r_n}} = \infty.$$

Zum Beweis siehe Port and Stone (1979, p. 225).

Das verallgemeinerte Dirichlet-Problem lässt sich dann formulieren als: Sei $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$. Finde ein $u \in \mathcal{C}^2(D)$, sodass gilt

$$\begin{aligned} Lu &= 0 && \text{in } D \\ \lim_{x \rightarrow y, x \in D} u(x) &= \varphi(y) && \text{falls } y \text{ regulär.} \end{aligned}$$

Bezeichne die zweite Bedingung mit $(ii)_r$.

Definition 4.4.42:

Eine messbare Menge $G \subset \mathbb{R}^d$ heißt thin (zu $(X_t)_t$), falls $\mathbb{P}^x(T_G = 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, wobei T_G die Ersteintrittszeit zu G bezeichnet. Eine Menge heißt semipolar, wenn sie eine abzählbare Vereinigung von Mengen ist, die allesamt thin sind.

G heißt polar, falls $\mathbb{P}^x(T_G < \infty) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt, d.h. für alle Startpunkte trifft der Prozess niemals G .

Jede polare Menge ist natürlich semipolar.

Definition 4.4.43 (Hunt-Bedingung):

$(X_t)_t$ genügt der Hunt-Bedingung (H) , falls jede semipolare Menge zu X auch polar zu X ist.

Satz 4.4.44 (Hunt-Bedingung für Brownsche Bewegung und Itô Diffusionen, Blumenthal, Gettoor):

Gilt die Hunt-Bedingung für die Brownsche Bewegung, so folgt mit Girsanov, dass die Hunt-Bedingung für Itô Diffusionen gilt, falls die Diffusionsmatrix ein beschränktes Inverses besitzt und der Drift-Koeffizient für alle $T < \infty$ der Novikov-Bedingung genügt.

Lemma 4.4.45:

Die Menge $I := \{ \text{irreguläre Punkte von } \partial D \}$ ist semipolar.

Beweis:

Blumenthal und Gettoor (1968), Proposition II.3.3. □

Satz 4.4.46 (Eindeutigkeit für das allgemeine Dirichlet Problem):

Angenommen X erfüllt die Hunt-Bedingung (H) und $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$ ist beschränkt und $u \in \mathcal{C}^2(D)$ ist eine beschränkte Lösung von (i) und (ii)_r. Dann gilt

$$u(x) = \mathbb{E}^x \varphi(X_{\tau_D}).$$

Beweis:

Sei $(D_k)_k$ eine aufsteigende Folge von offenen Mengen mit $D_k \subset\subset D$ und $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Dann gilt $X_{\tau_{D_k}} \rightarrow X_{\tau_D}$, woraus mit (ii)_r auch $u(X_{\tau_{D_k}}) \rightarrow \varphi(X_{\tau_D})$ folgt, falls $X_{\tau_D} = y \in \partial D$ regulär ist. Da die Menge der irregulären Punkte von ∂D semipolar ist, ist sie nach der Hunt-Bedingung auch polar. Also folgt mit der Definition

$$\mathbb{P}^x(T_I < \infty) = 0 \Rightarrow X_{\tau_D} \notin I \text{ } \mathbb{P}^x \text{-f.s.}$$

Also gilt $u(X_{\tau_{D_k}}) \rightarrow \varphi(X_{\tau_D})$ \mathbb{P}^x -f.s.

Nun gilt für $u \in \mathcal{C}^2(D)$ die Äquivalenz

$$Lu = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}u = 0 \text{ in } D \Leftrightarrow u \text{ } X \text{-harmonisch in } D,$$

woraus $u(x) = \mathbb{E}^x (u(X_{\tau_{D_k}}))$ für alle $x \in D_k$ und $k \in \mathbb{N}$ folgt. Also folgt aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x (u(X_{\tau_{D_k}})) = \mathbb{E}^x (\varphi(X_{\tau_D})).$$

□

Definition 4.4.47 (Elliptizität):

Ein Differentialoperator L heißt elliptisch in D , falls für alle $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und $x \in D$ gilt

$$\sum_a a_{ik}(x) \xi_i \xi_k.$$

L heißt gleichmäßig elliptisch in D , falls ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\sum_a a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq \delta \|\xi\|^2.$$

Satz 4.4.48 (Existenz für das allgemeine Dirichlet Problem):

Angenommen X erfüllt die Hunt-Bedingung (H) und L ist gleichmäßig elliptisch in D . Sei $\varphi \in \mathcal{C}(\partial D)$ beschränkt. Dann gilt für $u(x) := \mathbb{E}^x \varphi(X_{\tau_D})$, dass $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(D)$ für alle $\alpha < 1$ und u löst (i) und (ii)_r.

Beweis:

Wähle eine offene Kugel $\Delta \subset\subset D$. Sei $f \in \mathcal{C}(\partial\Delta)$. Dann folgt aus der PDE-Theorie, dass für alle $\alpha < 1$ ein $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\bar{\Delta})$ existiert, sodass $\tilde{u}|_{\Delta} \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\Delta)$ und

$$\begin{aligned} L\tilde{u} &= 0 && \text{in } \Delta \\ \tilde{u} &= f && \text{auf } \partial\Delta. \end{aligned}$$

(Vergleiche dazu Dynkin 1965 II, Seite 226). Also folgt aus [BJS64] Bers, John, Schechter (1964), Theorem 3, Seite 232, dass

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{C}^{2+\alpha}(K)} \leq C \left(\|L\tilde{u}\|_{\mathcal{C}^\alpha(\Delta)} + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{C}(\partial\Delta)} \right) \leq C \|f\|_{\mathcal{C}(\partial\Delta)},$$

wobei C nur von K und L abhängt. Nun löst \tilde{u} das allgemeine Dirichlet-Problem auf Δ für $f \in \mathcal{C}(\partial\Delta)$, sodass nach der Eindeutigkeitsaussage

$$\tilde{u}(x) = \mathbb{E}^x f(X_{\tau_\Delta}) = \int_{\partial\Delta} f(y) d\mu_x(y).$$

Daraus folgt für alle $x_1, x_2 \in K$

$$\left| \int_{\delta\Delta} f(y) d\mu_{x_1}(y) - \int_{\delta\Delta} f(y) d\mu_{x_2}(y) \right| \leq C \|f\|_{\mathcal{C}(\partial\Delta)} |x_1 - x_2|^\alpha$$

für alle $f \in \mathcal{C}(\partial\Delta)$. Per Approximation folgt dies auch für $f : \text{partial}\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und messbar.

Wähle nun $f = u|_{\partial\Delta}$, so gilt wegen der X -Harmonizität von u

$$|u(x_1) - u(x_2)| = \left| \int_{\partial\Delta} u(y) d\mu_{x_1}(y) - \int_{\partial\Delta} u(y) d\mu_{x_2}(y) \right| \leq C \|u\|_{\mathcal{C}(\partial\Delta)} |x_1 - x_2|^\alpha,$$

woraus $u \in \mathcal{C}^\alpha(K)$ für alle $K \subset\subset \Delta \subset\subset D$ folgt. Nach dem Eindeutigkeitstheorem folgt nun wegen der X -Harmonizität von u

$$\tilde{u}(x) = \mathbb{E}^x \tilde{f}(X_{\tau_\Delta}) = \mathbb{E}^x u(X_{\tau_\Delta}) = u(x),$$

woraus $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\tilde{\Delta})$ folgt und letztlich $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(D)$. Also gilt $0 = \mathcal{A}u = Lu$ und damit (i).

Für (ii)_r siehe [Dyn65], Theorem 0.4, S. 227 und Theorem 13.3, Seite 32-33. \square

4.4.H. Das stochastische Poisson-Problem

Sei $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Finde eine Funktion v , sodass gilt

$$(i)_s \quad \mathcal{A}v = -g \text{ in } D,$$

$$(ii)_s \quad \lim_{t \uparrow \tau_D} v(X_t) = 0 \text{ } \mathbb{P}^x \text{-f.s. f\"ur alle } x \in D.$$

Satz 4.4.49 (Lösung für das stochastische Poisson-Problem):

Angenommen $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine messbare Funktion mit $\mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} |g(X_s)| ds \right) < \infty$ für alle $x \in D$ (dies gilt z.B., wenn g beschränkt und τ_D \mathbb{P}^x -integrierbar ist für alle x). Dann gilt

- i) *Eindeutigkeit:* Ist $v \in \mathcal{C}^2(D)$ eine beschränkte Lösung von $(i)_s$ und $(ii)_s$, so gilt $v(x) = \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right)$.
- ii) *Existenz:* $v(x) := \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right)$ löst das stochastische Poisson-Problem.

Beweis:

- i) Benutze die Eindeutigkeit für das kombinierte Problem mit $\varphi = 0$.
- ii) Sei U offen, sodass $x \in U \subset\subset D$. Dann gilt

$$\frac{\mathbb{E}^x v(X_{\tau_U}) - v(x)}{\mathbb{E}^x \tau_U} = \frac{\mathbb{E}^x \left(\mathbb{E}^{X_{\tau_U}} \left(\int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right) \right) - \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right)}{\mathbb{E}^x \tau_U} =: (*).$$

Für $U \downarrow x$ folgt die Konvergenz der linken Seite gegen $\mathcal{A}v(x)$. Für die rechte Seite gilt wegen der Markoff-Eigenschaft

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{\mathbb{E}^x \left(\mathbb{E}^x \left(\left(\int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right) \circ \theta_{\tau_U} \mid \mathcal{F}_{\tau_U} \right) \right)}{\mathbb{E}^x \tau_U} \\ &= \frac{\mathbb{E}^x \left(\int_{\tau_U}^{\tau_D} g(X_s) ds \right) - \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right)}{\mathbb{E}^x \tau_U} \\ &= - \frac{\mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_U} g(X_s) ds \right)}{\mathbb{E}^x \tau_U} \xrightarrow{U \downarrow x} -g(x) \end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit von g . Dabei wurde benutzt, dass $\left(\int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right) \circ \theta_{\tau_U} = \int_{\tau_U}^{\tau_D} g(X_s) ds$. Also folgt $(i)_s$.

Für $(ii)_s$ sei $(D_k)_k$ eine aufsteigende Folge offener Mengen mit $D_k \subset\subset D$, $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Definiere $H(x) := \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} |g(X_s)| ds \right)$. Wegen der Markoff-Eigenschaft gilt

$$\mathbb{E}^x \left(H(X_{\tau_{D_k} \wedge t}) \right) = \mathbb{E}^x \left(\left(\int_0^{\tau_D} |g(X_s)| \right) \circ \theta_{\tau_{D_k} \wedge t} \right) = \mathbb{E}^x \left(\int_{\tau_{D_k} \wedge t}^{\tau_D} |g(X_s)| \right).$$

Mit Hilfe der dominierten Konvergenz mit $\left(\int_0^{\tau_D} |g(X_s)| ds \right)$ als Majorante folgt also

$$\mathbb{E}^x H(X_{\tau_D \wedge t}) = \mathbb{E}^x \left(\int_{\tau_D \wedge t}^{\tau_D} |g(X_s)| ds \right) \rightarrow 0$$

für $t \uparrow \tau_D$. Sei $t_n(\omega) \uparrow \tau_D(\omega)$, so gilt

$$\mathbb{E}^x (X_{t_n}) = \mathbb{E}^x H(X_{t_n \wedge \tau_D}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

sodass $|X_{t_{n_l}}| \leq H(X_{t_{n_l}}) \rightarrow 0$ \mathbb{P}^x -f.s. für $l \rightarrow \infty$, denn $H(X_{t_{n_l}}) \rightarrow 0$ für eine Teilfolge $(n_l)_l$ \mathbb{P}^x -f.s.

□

Wir betrachten das allgemeine Poisson-Problem: Sei $g \in \mathcal{C}(D)$. Finde ein $v \in \mathcal{C}^2(D)$, sodass gilt

$$(i) \quad Lv = -g \text{ in } D$$

$$(ii)_r \quad \lim_{x \rightarrow y, x \in D} v(x) = 0 \text{ für alle regulären Punkte } y \in \partial D.$$

Satz 4.4.50 (Eindeutigkeit für das allgemeine Poisson-Problem):

Angenommen X erfüllt die Hunt-Bedingung (H) und $g \in \mathcal{C}(D)$, sodass für alle $x \in D$ gilt $\mathbb{E}^x \int_0^{\tau_D} |g(X_s)| ds < \infty$. Ist $v \in \mathcal{C}^2(D)$ eine Lösung von (i) und (ii)_r, sodass ein $C > 0$ mit $|v(x)| \leq C(1 + \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_D} |g(X_s)| ds)$ existiert, so ist $v(x) = \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_D} g(X_s) ds$.

Beweis:

Sei (D_k) eine Folge wie im vorherigen Beweis. Dann gilt mit Hilfe der Dynkin-Formel

$$\mathbb{E}^x v(X_{\tau_{D_k}}) = v(x) + \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_{D_k}} \underbrace{Lv(X_s)}_{=-g(X_s)} ds = v(x) - \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_{D_k}} g(X_s) ds,$$

d.h. $v(x) = \mathbb{E}^x v(X_{\tau_{D_k}}) + \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_{D_k}} g(X_s) ds$. Für $k \rightarrow \infty$ gilt

$$v(x) = \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_D} g(X_s) ds.$$

Wegen $X_{\tau_{D_k}} \rightarrow X_{\tau_D}$ folgt aus (ii)_r $v(X_{\tau_{D_k}}) \rightarrow 0$, falls $y \in \partial D$ regulär ist. Erneut sind die irregulären Punkte semipolar, d.h. nach der Hunt-Bedingung polar, d.h. $X_{\tau_D} \notin I$ \mathbb{P}^x -f.s. Daraus folgt $v(X_{\tau_{D_k}}) \rightarrow 0$ \mathbb{P}^x -f.s. □

Satz 4.4.51 (Existenz für das allgemeine Poisson-Problem):

Angenommen L ist gleichmäßig elliptisch in D . Sei $g \in \mathcal{C}^\alpha(D)$ für ein $\alpha > 0$ beschränkt. Dann ist $v(x) := \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \in \mathcal{C}^2(D)$ und v löst (i) und (ii)_r.

Beweis:

Die Idee ist es, einen Ansatz wie für das allgemeine Dirichlet-Problem zu nehmen. Für Details siehe ... □

A. Nachträge

Doob's optionaler Stoppsatz für zeitdiskrete Martingale benötigt nicht die Voraussetzung, dass die Stoppzeiten beschränkt sind, sofern wir von einem Martingal $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ mit letztem Element ausgehen. Die Version für Submartingale erfordert deutlich mehr Arbeit - siehe Chung, 1974, Satz 9.3.5.

Lemma A.1:

Ist das Martingal $(X_n)_n$ abschließbar, d.h. existiert ein X_∞ mit $X_n = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt für beliebige Stoppzeiten $\alpha \leq \beta$

$$\mathbb{E}(X_\beta | \mathcal{F}_\alpha) = X_\alpha \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis:

1. Schritt: Wir zeigen $X_\alpha \in \mathcal{L}^1$, X_β geht analog. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |X_\alpha| &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \int \underbrace{\mathbb{1}_{\{\alpha=n\}}}_{\in \mathcal{F}_n} |X_n| d\mathbb{P} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \int \mathbb{1}_{\{\alpha=n\}} |X_\infty| d\mathbb{P} = \mathbb{E} |X_\infty| < \infty \end{aligned}$$

nach Voraussetzung.

2. Schritt: Zeige, dass $\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\alpha) = X_\alpha$ \mathbb{P} -f.s. Dazu sei $A \in \mathcal{F}_\alpha$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A X_\alpha d\mathbb{P} &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \int \underbrace{\mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\}}}_{\in \mathcal{F}_n} X_n d\mathbb{P} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \int \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\}} X_\infty d\mathbb{P} = \int_A X_\infty d\mathbb{P} \end{aligned}$$

3. Schritt: Da $\alpha \leq \beta$ ist, gilt $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta$. Somit ist auch

$$X_\alpha = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\beta)}_{=X_\beta} | \mathcal{F}_\alpha) = \mathbb{E}(X_\beta | \mathcal{F}_\alpha)$$

gemäß den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte. □

Literatur

- [BG68] Robert M. Blumenthal and Ronald K. Gettoor. *Markov processes and potential theory*, volume 29 of *Pure and applied mathematics ; 29*. Acad. Pr., New York, 1968.
- [BJS64] Lipman Bers, Fritz John, and Martin Schechter. *Partial differential equations*, volume 3 of *Lectures in applied mathematics ; 3*. Interscience Publ., New York, NY, 1964.
- [Dur05] Richard Durrett. *Probability : theory and examples*. Duxbury advanced series. Thomson / Brooks/Cole, Belmont, Calif. [u.a.], 3. ed. edition, 2005.
- [Dyn65] Evgenij B. Dynkin. *Markov processes/2*, volume 122 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen ; 122*. 1965.
- [KS10] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate texts in mathematics ; 113*. Springer, New York, NY, 2. ed., springer study ed., [nachdr., publ. on demand] edition, 2010.
- [PS78] Sidney C. Port and Charles J. Stone. *Brownian motion and classical potential theory*. Probability and mathematical statistics. Acad. Press, New York [u.a.], 1978.