9. Übungsblatt

Abgabe: Freitag, 8.6.12

Aufgabe 1 Sei C der binäre Code mit der Erzeugermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Codegitter Γ_C. Ist Γ_C isometrisch zu dem Standardgitter?

Aufgabe 2 (a) Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ natürliche Zahlen. Seien $\Gamma = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} b_i$ und $\Gamma' = \oplus_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{Z} b_i$. Zeigen Sie, dass

$$\phi : \Gamma/\Gamma' \longrightarrow \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/\lambda_n\mathbb{Z}$$

$$\sum_{i=1}^n z_i b_i + \Gamma' \mapsto (z_1 + \lambda_1\mathbb{Z}) + \ldots + (z_n + \lambda_n\mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus zwischen Gruppen ist.

(b) Seien Γ und Γ' zwei Gitter so, dass $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ist. Zeigen Sie, dass Γ und Γ' Gitterbasen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ besitzen so, dass $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\lambda_1 b_1, \ldots, \lambda_n b_n\}$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 3 Sei $\Gamma \subseteq R^n$ ein Gitter. Zeigen Sie, dass Γ genau dann unimodular ist, wenn $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) = 1$ und $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{Z})$ gilt.

Aufgabe 4 Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\Gamma = \mathbb{Z}(1, 4, -3) \oplus \mathbb{Z}(3, -2, 3) \oplus \mathbb{Z}(2, -2, 2)$. Weiter sei $U_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 = \langle (1, 0, -2), (2, 1, 1) \rangle_{\mathbb{R}}$. Ferner bezeichne $\pi_i : V \to U_i$ die Projektion von $V = U_1 \oplus U_2$ auf U_i.

(a) Bestimmen Sie Gitterbasen für $\Gamma_1 = \Gamma \cap U_1$, $\Gamma_2 = \Gamma \cap U_2$, $\Gamma_1' = \pi_1(\Gamma)$ und $\Gamma_2' = \pi_2(\Gamma)$.

(b) Zeigen Sie

$$\Gamma_1'/\Gamma_1 \cong \Gamma_2'/\Gamma_2.$$