7. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 2.12.2014

Aufgabe 1 Überprüfen Sie, welche der Teilmengen H der jeweiligen Gruppe $(G, \circ)$ eine Untergruppe von G ist.

(a) $G = (\mathbb{Z}, +)$ und $H = 3\mathbb{Z} := \{3 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$;

(b) $G = (\mathbb{Z}, +)$, sei $n \in \mathbb{N}$ und $H = n\mathbb{Z} := \{n \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$;

(c) $G = (\mathbb{Q}, +)$ und $H = 3\mathbb{Z}$;

(d) $G = (\mathbb{Q}, +)$ und $H = \{-1, 1\}$;

(e) $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $H = \{-1, 1\}$.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie alle Untergruppen von

(a) $(S_3, \circ)$;

(b) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

Aufgabe 3 Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit endlich vielen Elementen, $n := |G| < \infty$, und sei g ein Element in G. Zeigen Sie: $\mathrm{ord}(g) \leq n$.
Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\{g, g^2, g^3, \ldots\}$, wobei $g^n := g \circ g \circ \cdots \circ g$ (n mal) ist.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass $(S_3, \circ)$ und $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ nicht isomorph sind.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4 von der sechsten Übung.