3. Präsenzübungsblatt

Aufgabe 1 Auf der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$, i die imaginäre Zahl, sei die folgende Multiplikation definiert:
Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelte

$$(a + b\ i) \cdot (c + d\ i) := (ac - bd) + (ad + bc)\ i.$$

(Einfach ausmultiplizieren).
Der Betrag $|z|$ der komplexen Zahl $z := a + b\ i$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Zeigen Sie, dass $(S, \cdot)$ eine Gruppe bildet, wobei $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene ist.

Hinweis. Sie können das Folgende benutzen:
1. $\cdot$ ist assoziativ auf $\mathbb{C}$ und
2. für zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Aufgabe 2 Stellen Sie die Verknüpfungstabelle von $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot_5)$ auf.

Aufgabe 3 Welche der folgenden Mengen ist zusammen mit Multiplikation modulo 18 $\cdot_{18}$ eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Aussagen!

$$\{1, 5\}, \quad \{1, 5, 7\}$$

$$\{1, 7, 13\}, \quad \{1, 2, 5\}$$

$$\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}.$$

Hinweis. Sie können das Assoziativgesetz zitieren.