

6. Präsenzübungsblatt

Aufgabe 1 Überprüfen Sie, dass die Menge $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ zusammen mit der Multiplikation \cdot_{15} eine Gruppe bildet. Bestimmen Sie die Verknüpfungstabelle und die Ordnungen der einzelnen Elemente.

Aufgabe 2 Sei $G := [0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Wir führen auf G die folgende Verknüpfung ein:

$$x + y = \begin{cases} x + y & \text{falls } 0 \leq x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{falls } x + y \geq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe unendlicher Ordnung ist, in der jedes Element endliche Ordnung hat.

Aufgabe 3 Sei (G, \circ) eine Gruppe und g, h Elemente in G .

Zeigen Sie, falls $o(g) = o(h) = o(g \circ h) = 2$ gilt, dann ist $g \circ h = h \circ g$.

Aufgabe 4 Wir betrachten die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5$, für die $D :=$

$$ad - bc = 1 \text{ gilt. Sei } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $o(A_1)$, $o(A_2)$, $o(A_1A_2)$ und $o(A_2A_1)$.