

## 6. Präsenzübungsblatt

**Aufgabe 1** Überprüfen Sie, dass die Menge  $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$  zusammen mit der Multiplikation  $\cdot_{15}$  eine Gruppe bildet. Bestimmen Sie die Verknüpfungstabelle und die Ordnungen der einzelnen Elemente.

**Aufgabe 2** Sei  $G := [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . Wir führen auf  $G$  die folgende Verknüpfung ein:

$$x + y = \begin{cases} x + y & \text{falls } 0 \leq x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{falls } x + y \geq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $(G, +)$  eine abelsche Gruppe unendlicher Ordnung ist, in der jedes Element endliche Ordnung hat.

**Aufgabe 3** Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $g, h$  Elemente in  $G$ .

Zeigen Sie, falls  $o(g) = o(h) = o(g \circ h) = 2$  gilt, dann ist  $g \circ h = h \circ g$ .

**Aufgabe 4** Wir betrachten die Matrizen  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5$ , für die  $D :=$

$$ad - bc = 1 \text{ gilt. Sei } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie  $o(A_1)$ ,  $o(A_2)$ ,  $o(A_1A_2)$  und  $o(A_2A_1)$ .