1. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 18.4.2013

Aufgabe 1 (a) Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und H eine Untergruppe so, dass $N \cap H = 1$ ist.
Zeigen Sie, dass das semidirekte Produkt $N : H$ eine Untergruppe von G der Ordnung $|N||H|$ ist.

(b) Sei $G = Sym(4)$ und sei $V_4 := \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ die Kleinsche Vierergruppe.

(b.a) Zeigen Sie, dass V_4 ein Normalteiler von G ist.

(b.b) Zeigen Sie, dass $G = V_4 : H$ für eine Untergruppe H von G, für die $H \cong Sym(3)$ gilt.

Aufgabe 2 Überprüfen Sie, welche der folgenden Gruppen frei ist:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$.

(b) $(\mathbb{Z}_p, +)$, p eine Primzahl.

(c) $(\mathbb{Z}, +)$.

(d) D_8.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass jede freie Gruppe F torsionsfrei ist, d.h. ist $x \in F$ von endlicher Ordnung, dann folgt $x = 1$.

Aufgabe 4 Die Gruppe G und die Elemente a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 aus G seien öffentlich. Alice und Bob wollen einen gemeinsamen geheimen Schüssel bestimmen. Sie gehen folgendermassen vor:

- Alice wählt ein privates x aus G als ein Wort in a_1, a_2, a_3, d.h. $x = x(a_1, a_2, a_3)$ und schickt b_1^x, b_2^x, b_3^x an Bob.
- Bob wählt ein privates y aus G als ein Wort in b_1, b_2, b_3, d.h. $y = y(b_1, b_2, b_3)$ und schickt a_1^y, a_2^y, a_3^y an Alice.
- Der gemeinsame Schüssel ist dann $K = x^{-1}y^{-1}xy$.

Wie berechnet Alice (bzw. Bob) K aus der Information, die sie (bzw. er) hat?