

10. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 20.06.2013

Aufgabe 1 Sei Δ der kannonische Zopf in der Zopfgruppe B_n . Zeigen Sie:

- (a) Für jedes $1 \leq i \leq n - 1$ gibt es ein $\gamma_i \in \tilde{Sym}(n)$ so, dass $\Delta = \gamma_i \sigma_i$ gilt.
- (b) Für jedes $1 \leq i \leq n - 1$ gilt $\sigma_i \Delta = \Delta \sigma_{n-i}$.

Aufgaben 2 und 3 beschreiben eine wichtige Untergruppe der Zopfgruppe B_n . Um den Rechenaufwand zu minimieren, betrachten wir $n = 3$.

Aufgabe 2 Sei $\varphi : B_3 \rightarrow Sym(3)$ der Epimorphismus gegeben durch $\sigma_i \mapsto (i \ i + 1)$. Weiter sei S der Stabilisator von 1 in $Sym(3)$ und H das Urbild von S unter φ .

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4, Blatt 9 eine Schreier-Transversale von H in B_n ;
- (b) Bestimmen Sie eine Präsentation von H mit Hilfe des Reidemeister-Schreier Algorithmus.

Aufgabe 3 Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 2.

- (a) Zeigen Sie, mit Hilfe von Aufgabe 2, dass H eine Präsentation $H = \langle a, b, x \mid a^x = b, (ab)^x = ab \rangle$ hat;
- (b) Folgern Sie aus (a), dass H das semidirekte Produkt einer freien Gruppe vom Rang 2 und der Zopfgruppe $B_{n-1} = B_2$ ist.

Aufgabe 4 Sei $G = B_{28}$ und $H = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{26} \rangle \leq G$.

- (a) Leiten Sie die linkskanonische Darstellung der Elemente aus H aus der von G ab;
- (b) Wählen Sie als Erzeugendensystem von H die Menge $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{26}\}$. Verschlüsseln Sie mit dem Kryptosystem basierend auf dem Reidemeister-Schreier Algorithmus den Text 'Sonne'.
- (c) Kann der Empfänger die Nachricht wieder entschlüsseln?