3. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 2.5.2013

Aufgabe 1 Sei G eine Gruppe, sei g ein Element in G und sei U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

(a) $C_G(g)$ ist eine Untergruppe von G;

(b) $N_G(U) := \{g \in G \mid g^{-1}ug \in U \text{ für alle } u \in U\}$ ist ebenso eine Untergruppe von G.

Aufgabe 2 Sei N ein Normalteiler von $Alt(5)$. Zeigen Sie

$$N = 1 \text{ oder } N = Alt(5).$$

(d.h. $Alt(5)$ ist eine *einfache* Gruppe).

Aufgabe 3 Seien g und h zwei Elemente in $Sym(n)$. Geben Sie ein Kriterium, welches entscheidet, ob g und h in $Sym(n)$ konjugiert sind oder nicht.

Aufgabe 4 Sei

$$Q_8 := \langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rangle \leq GL_2(\mathbb{C})$$

die Quaternionengruppe der Ordnung 8. Bestimmen Sie die

(a) Untergruppen von G;

(b)* und die Normalteiler von G.

Aufgabe 5* Zeigen Sie: Eine freie Gruppe ist genau dann abelsch, wenn sie eine unendliche zyklische Gruppe ist.