4. Übungsblatt

Abgabe: Freitag, 10.5.2013

In den ersten beiden Aufgaben sei F eine Gruppe, die frei über der Menge X ist. Setze $F_a := \langle w \in F \mid w < a \rangle$ (Bemerke es kann $a \in F_a$ oder $a \notin F_a$ gelten). Setze weiter

$$A := \{a \in F \mid a \notin F_a\}.$$

Wir wollen zeigen, dass A Nielsen-reduziert ist.

Aufgabe 1 Zeigen Sie:

(a) Sei $Y \subseteq F$. Gilt $|xy| \geq |x|$ für alle $x, y \in Y \cup Y^{-1}, x \neq y^{-1}$, dann erfüllt Y die Bedingung (N2).

(b) Zeigen Sie, dass A die Bedingung (N1) erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass A die Bedingung (N2) erfüllt.

(Hinweis: Um zu entscheiden, ob $x \in F_x$ gilt, hilft es Elemente w aus F zu finden, für die $w < x$ gilt. Genauer: Nehmen Sie in (c) an, dass (N3) nicht gilt und zeigen Sie dann, dass $x \in F_x$ für ein $x \in A$ folgt.)

Aufgabe 2 Zeigen Sie (N2).
(Hinweis: Schauen Sie sich an, wie (N3) im Beweis von Satz (1.10) erreicht wurde.)

Aufgabe 3 Geben (und beweisen) Sie eine Präsentation der Quaternionengruppe Q_8.

Aufgabe 4 Eine freie Gruppe von endlichem Rang, besitzt eine Untergruppe, die frei ist von unendlichem Rang:

Sei F eine Gruppe, die frei üeber $\{x, y\}$ ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Nielsen-reduziert ist.
Folgern Sie daraus die obige Aussage.