5. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 16.05.2013

Aufgabe 1 Folgern Sie aus dem Satz, dass eine endliche Menge von Wörtern in einer freien Gruppe durch endlich viele Nielsen-Transformationen in eine Nielsen-reduzierte Menge überführt werden kann, dass eine über $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ freie Gruppe nicht durch weniger als n Elemente erzeugt werden kann.

Aufgabe 2 Sei F die freie Gruppe über $\{a, b\}$ und U die Untergruppe von F, die von den Wörtern $b^n a b^{-n}$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, erzeugt wird (siehe den letzten Übungszettel). Zeigen Sie, dass U der kleinste Normalteiler N von F ist, der a enthält.
Hinweis: Zeigen Sie, dass ein Wort genau dann in N liegt, falls sich die b-Exponenten des Wortes zu Null aufsummieren.

Aufgabe 3 Lösen Sie mit Hilfe der Nielsen-Reduktion das Verallgemeinerte Wort-Problem für freie Gruppen:
Sei F die freie Gruppe über $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und H eine Untergruppe von F, die von den Wörtern $w_1, \ldots, w_m$ aus F erzeugt wird. Weiter sei y ein Wort aus F. Gesucht ist ein Algorithmus, der entscheidet, ob $y \in H$ oder nicht. (Benutzen Sie dabei das Anfangsstück $k(w)$ eines Wortes).

Aufgabe 4 Sei F die freie Gruppe über $x_1 = a$ und $x_2 = b$. Sei $w_1 = a^2, w_2 = ba^{-1}$.

(a) Zeigen Sie: w_1^2 und $w_2 w_1^{-1}$ bilden eine Nielsen-reduzierte Menge über F als freie Gruppe über $\{w_1, w_2\}$, aber nicht als freie Gruppe über $\{x_1, x_2\}$.

(b) Aber $\{w_1 w_2, w_1^2, w_2 w_1\}$ ist eine Nielsen-reduzierte Menge über F als freie Gruppe über $\{x_1, x_2\}$, aber nicht als freie Gruppe über $\{w_1, w_2\}$.