10. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 21. Dezember 2017 bis 10 Uhr

Aufgabe 1 Sei h ein Endomorphismus, der bezüglich einer Basis die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} A & 0_{s,r} \\ 0_{r,s} & B \end{pmatrix}$$

hat, wobei A eine $(r \times r)$, B eine $(s \times s)$-Matrix, und $0_{s,r}$ bzw. $0_{r,s}$ $(s \times r)$ bzw. $(r \times s)$-Matrizen sind, deren Einträge alle gleich Null sind.

(a) Zeigen Sie, dass $m_h =$kgV(m_A, m_B) gilt.

(b) Bestimmen Sie f_h in Abhängigkeit von f_A und f_B.

Aufgabe 2 Sei $N = (n_{ij}) \in K^{n \times n}$ die Matrix mit $n_{i,i+1} = 1$ und $n_{ij} = 0$ für $j \neq i + 1$.

(a) Berechnen Sie N^i für $2 \leq i \leq n$.

(b) Ist N nilpotent? Wenn ja, dann geben sie die Stufe an.

Aufgabe 3 Es sei N nilpotent der Stufe t, $V = Z(b_1, N) \oplus \cdots \oplus Z(b_s, N)$ und $\mathsf{dim} Z(b_i, N) = p_i$. Bestimmen Sie $\mathsf{Ker}\ N \subset \mathsf{Ker}\ N^2 \subset \cdots \subset \mathsf{Ker}\ N^{t-1}$

Aufgabe 4 Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $h \in \mathsf{End}(V)$ und sei $m_h = g_1 \cdots g_r$, wobei $g_1, \dots g_r \in K[x]$ paarweise teilerfremde Polynome sind. Es gilt dann, wie in der Vorlesung gezeigt wurde, dass

$$V = \mathsf{Ker}\ g_1(h) \oplus \cdots \oplus \mathsf{Ker}\ g_r(h).$$

Zeigen Sie:

(a) $h(\mathsf{Ker}\ g_i(h)) \subseteq \mathsf{Ker}\ g_i(h)$.

(b) Ist $g_1 = (x - a)^n$ und m so gewählt, dass

$$\mathsf{Ker}\ (h - a \cdot id_V) \subset \dots \mathsf{Ker}\ (h - a \cdot id_V)^m = \mathsf{Ker}\ (h - a \cdot id_V)^{m+1}$$

gilt, so ist $n = m$.