Lineare Algebra II *WS 2017/18*
Barbara Baumeister

11. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 11. Januar 2018 bis 10 Uhr

Aufgabe 1 Bestimmen Sie Basen, bezüglich derer die folgenden Matrizen Jordansche Normalform haben, und geben Sie jeweils das characteristische und das Minimalpolynom an.

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (b) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (a) Sei $V = \mathbb{C}^5$ und $h \in \mathsf{End}(V)$ mit $m_h = (x-4)^3$. Welche Jordansche Normalform kann h haben?

(b) Sei $V = \mathbb{C}^6$ und $h \in \mathsf{End}(V)$ mit $m_h = x^2(x-3/2)^3$. Welche Jordansche Normalform kann h haben?

Aufgabe 3 Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $h \in \mathsf{End}(V)$ mit Minimalpolynom $m_h = x^2 + 4x + 4$.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom f_h von h an.

(b) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von h.

Aufgabe 4 Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $V = K^n$. Weiter sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V und $g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$. Dann ist

$$G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n \times n}$$

die sogenannte *Grammatrix* von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis B.
Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\overline{G}^t = G$.

(b) Es ist $v^t G \overline{w} = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$.