12. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 18. Januar 2018 bis 10 Uhr

Aufgabe 1 Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise orthogonale Vektoren.

(a) Zeigen Sie

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2$$

und folgern Sie daraus den Satz des Pythagoras.

(b) Nun seien die v_i sogar paarweise orthonormal. Zeigen Sie: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine Basis genau dann, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \langle v_i, w \rangle.$$

Aufgabe 2 Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und} v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{C}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Sei $U = \langle v_1, v_2 \rangle$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und} v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Führen Sie explizit das Gram-Schmidt-Verfahren durch, um eine Orthonormalbasis u_1, u_2, u_3 von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ zu erhalten.

(b) Ergänzen Sie u_1, u_2, u_3 um einen Vektor u_4 zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

(c) Bestimmen Sie explizit die Matrix des Basiswechsel O von der Standardbasis zur Basis $u_1, \ldots, u_4$ sowie deren Inverse.

Aufgabe 4 Sei $A \in K^{n \times m}$. Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass gilt Zeilenrang(A) =Spaltenrang(A). Sei $f_A : K^m \to K^n, x \mapsto Ax$.

(a) Benutzen Sie Aufgabe 2 von Übung 1, um zu zeigen, dass es Basen B und C des K^n bzw. K^m gibt, so dass für $\overline{A} = M_C^B(f_A)$ gilt Zeilenrang$(\overline{A})$ =Spaltenrang$(\overline{A})$.

(b) Zeigen Sie, sind $X \in K^{n \times n}$ und $Y \in K^{m \times m}$ reguläre Matrizen, dann ist Rang (A) =Rang(XAY).

(c) Folgern Sie, dass Rang (A^t) =Rang$(Y^t A^t X^t)$ =Rang$((XAY)^t)$ gilt.

(d) Seien X und Y reguläre Matrizen so, dass $XAY = \overline{A}$ gilt (warum gibt es die?). Benutzen Sie nun (a) - (c), um zu zeigen Zeilenrang(A) =Spaltenrang(A).