13. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 25. Januar 2018 bis 10 Uhr

Aufgabe 1 Sei V ein n-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $\alpha \in \mathsf{End}(V)$ normal. Zeigen Sie: Wenn v und w Eigenvektoren von α bezüglich verschiedener Eigenwerte sind, dann gilt $v \perp w$.

Aufgabe 2
(a) In welcher Beziehung stehen die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms eines Endomorphismus und des adjungierten Endomorphismus?

(b) Sei $A = (a_{ij})$ eine hermitesche $n \times n$- Matrix. Zeigen Sie:

(b.a) Alle Hauptdiagonalelemente a_{ii} von A sind reell.

(b.b) Das charakterstische Polynom von A hat reelle Koeffizienten.

(b.c) Die Determinante und die Spur von A sind reell, wobei die Spur von A die Summe der Hauptdiagonalelemente ist.

Aufgabe 3 Es sei V der Vektorraum der $n \times n$- Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass V mit $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}\langle B^t A\rangle$ ein euklidischer Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie für $n = 2$ eine Orthonormalbasis von V.

(c) Bestimmen Sie für $n = 2$ das orthogonale Komplement $U^\perp$ des Untervektorraums U der symmetrischen Matrizen, sowie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Aufgabe 4 Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als einen $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2. Sei $w \in \mathbb{C}$ und $h_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto wz$. Zeigen Sie:

(a) Durch $\langle x, y\rangle :=\mathrm{Re}(x\overline{y})$ für $x, y \in \mathbb{C}$ wird ein positiv definites Skalarprodukt definiert.

(b) h_w ist in $\mathsf{End}(\mathbb{C})$.

(c) Bestimmen Sie die $w \in \mathbb{C}$, für die h_w bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ aus (a) eine

(b.a) selbstadjungierte Abbildung

(b.b) orthogonale Abbildung

(b.c) normale Abbildung

ist.