2. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 26. Oktober 2017

Aufgabe 1 Sei V ein K-Vektorraum und $f \in V^*$. Zeigen Sie: Für jedes $a \in V$ mit $f(a) \neq 0$ gilt $V = Ka \oplus \mathrm{Ker} f$.

Aufgabe 2 Sei $pr_i : K^n \to K$ die Projektion des K^n auf die i-te Komponente, $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie:

(a) pr_i is K-linear für $1 \leq i \leq n$.

(b) $f : V \to K^n$ is K-linear genau dann, wenn $pr_i \circ f$ K-linear ist für alle $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe 3 Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Definiere

$$\varphi : V \to (V^*)^*, \; x \mapsto \varphi_x,$$

wobei $\varphi_x(f) = f(x)$ ist für alle $f \in V^*$.
Zeigen Sie, dass φ ein Isomorphismus zwischen den K-Vektorräumen V und $(V^*)^*$ ist.

Aufgabe 4 Es seien $v_1 = (1, -1, 3), v_2 = (0, 1, -1)$ und $v_3 = (0, 3, -2)$ Vektoren in $V = \mathbb{R}^3$. Dann ist $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V. Bestimmen Sie die zu B duale Basis B^* und stellen Sie die Elemente in B^* mittels der zu der kannonischen Basis dualen Basis dar.