

### 3. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 2. November 2017

**Aufgabe 1** Sei  $V = \mathbb{R}^4$  und  $U = \{(0, 0, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ . Zeigen Sie, dass

- (a)  $V/U = \{(c, d, 0, 0) + U \mid c, d \in \mathbb{R}\}$ .
- (b)  $V/U = \langle (1, 0, 0, 0) + U, (0, 1, 0, 0) + U \rangle$ .
- (c) Geben Sie einen Endomorphismus  $h \in \text{End}(V)$  an, so dass  $U = \text{Ker } h$  gilt.
- (d) Bestimmen Sie  $\dim \text{Im } (h)$  für den Endomorphismus  $h$  aus (c).

**Aufgabe 2** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $U$  ein Unterraum von  $V$ . Zeigen Sie:

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

**Aufgabe 3** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $v + U$  ein affiner Unterraum von  $V$ . Zeigen Sie, dass es ein lineares Gleichungssystem gibt, dessen Lösungsmenge  $v + U$  ist.

**Aufgabe 4** (a) Bestimmen Sie  $\text{sgn}((123))$ ,  $\text{sgn}((1234))$  und  $\text{sgn}((12345))$ .

(b) Sei  $z \in S_n$  ein Zykel der Länge  $k$ . Bestimmen Sie  $\text{sgn}(z)$ .

(c) Sei  $g \in S_n$ ,  $n \geq 2$ , und sei  $g = z_1 \cdots z_t$  die disjunkte Zykelzerlegung von  $g$ , wobei die  $z_i$  Zykel der Länge  $k_i$  sind.

Zeigen Sie:

$$\text{sgn}(g) = (-1)^{\sum_{i=1}^t (k_i - 1)}.$$