6. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 23. November 2017 bis 10 Uhr

Aufgabe 1 Sei A eine $(m \times n)$-Matrix über K und r_{max} das maximale r mit der Eigenschaft, dass eine $(r \times r)$-Untermatrix B von A mit $\mathsf{det}\ B \neq 0$ existiert. Beweisen Sie:

$$\mathsf{Rang}\ A = r_{\mathsf{max}}$$

Aufgabe 2 Seien v, w zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$ und $L \subseteq \mathbb{R}^2$ die Gerade durch v und w. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathsf{det} \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\}$$

Aufgabe 3 (a) Sei $f \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$f(e_1) = 3e_1 - e_2, f(e_2) = -e_1 + 3e_2 \text{ und } f(e_3) = 2e_3.$$

Bestimmen Sie das Spektrum von f und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $h \in \mathsf{Hom}_K(V, V)$. Zeigen Sie, dass

0 ist Eigenwert von h genau dann, wenn $\mathsf{det}\ h = 0$.

Aufgabe 4 (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ isomorphe $\mathbb{R}$-Vektorräume sind.

(b) Übertragen Sie die Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf den $\mathbb{R}^2$.

(c) Wir identifizieren nun $\mathbb{C}$ und den $\mathbb{R}^2$. Der Betrag $|z|$ der komplexen Zahl $z \in \mathbb{R}^2$ ist die Länge des Vektors z. Bestimmen Sie $|z|$ für $z = (a, b)$.

(d) Gegeben sei für $z \in \mathbb{R}^2$

* $|z|$ und
* der Winkel φ zwischen der e_1-Achse und dem Vektor z.

Bestimmen Sie z.