7. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 30. November 2017 bis 10 Uhr

Aufgabe 1 Die lineare Abbildung $h \in \mathsf{End}(V)$ sei gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom f_h.

(b) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, dann geben Sie eine Basis aus Eigenwerten an.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für einen Körper K und beliebige Polynome $f, g \in K[x]$ gilt:

(a) $(f \cdot g) = f + g$.

(b) $K[x]$ ist nullteilerfrei.

(c) Sei $f = x^6 - 2x^4 + x^3 - 2x + 1$ und $g = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Teilen Sie f durch g mit Rest.

Aufgabe 3 Zeigen Sie:
Seien $f_i \in K[x]$, $1 \leq i \leq n$, Polynome mit größten gemeinsamen Teiler h. Dann gibt es $g_i \in K[x]$, $1 \leq i \leq n$, so, dass gilt

$$h = \sum_{i=1}^{n} g_i f_i.$$

Aufgabe 4 (a) Zeigen Sie, dass $SL_n(K)$, die Menge der speziellen $n \times n$-Matrizen über K, zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. (Die Assoziativität der Matrizenmultiplikation ist bekannt).

(b) Zeigen Sie für zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B, dass $\mathsf{det}(AB) = \mathsf{det}A \cdot \mathsf{det}B$ gilt.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 der fünften Übung.