Lineare Algebra II *WS 2017/18*
Barbara Baumeister

8. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 7. Dezember 2017 bis 10 Uhr

Aufgabe 1 (a) Sei $V = \mathbb{R}^3$, $h \in \mathsf{End}(V)$ und $m_h = x^2 + 4x + 4$ das Minimalpolynom von h. Geben Sie das charakteristische Polynom f_h von h an.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen über $\mathbb{C}$ zu

$$A = \begin{pmatrix} i & -\frac{4}{3}i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ -1+i & \frac{1}{3} - i & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dann die (gegebenenfalls auch komplexen) Eigenwerte und die Eigenräume von A.

Aufgabe 2 Seien g und h zwei diagonalisierbare Homomorphismen aus $\mathsf{End}(V)$ für die gilt $g \circ h = h \circ g$. Zeigen Sie:

(a) g läßt die Eigenräume von h invariant und umgekehrt.

(b) g und h sind gleichzeitig diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis B von V so, dass $M_B^B(g)$ und $M_B^B(h)$ Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe 3 (a) Geben Sie eine (2×2)-Matrix an, die über keinem Körper diagonalisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix und ihre Transponierte dasselbe characteristische Polynom besitzen.

(c) Zeigen Sie, dass eine symmetrische (2×2)-Matrix über $\mathbb{R}$ stets diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4 Es seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume. Geben Sie eine Basis von $\mathsf{Hom}(V, W)$ an (mit Beweis).
(Hinweis: Beachten Sie, dass der Dualraum $V^* = \mathsf{Hom}(V, K)$ ist und verallgemeinern Sie die dort gegebene (Standard-)Basis zu einer von $\mathsf{Hom}(V, W)$.)