Weihnachtszettel zum extra Punkte sammeln

Abgabe: Donnerstag,11. Januar 2017 bis 10 Uhr
Bei der Klausur können Sie dann wieder vier der fünf Aufgaben aussuchen.

Aufgabe 1
(a) Es sei V ein K-Vektorraum und U ein Unterraum. Definieren Sie den Faktorraum V/U.

(b) Sei $U = \{(0, u_2, 0, u_4) \mid u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$ und $V = \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass $V/U = \{(u_1, 0, u_3, 0) \mid u_1, u_2 \in R\}$ ist.

(c) Es sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume so, dass $V = U_1 \oplus U_2$ ist. Zeigen Sie mit dem Homomorphiesatz, dass $V/U_1 \cong U_2$ ist

Aufgabe 2
(a) Es sei $V = \mathbb{Q}^3$. Stellen Sie die Basis von V^*, die dual ist zu der V-Basis

$$\{(1, 1, 0)^t, (0, 1, 1)^t, (0, 0, 1)^t\},$$

mit Hilfe der Standardbasis des V^* dar.

(b) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Vektoren. Zeigen Sie, dass es ein $f \in V^*$ so gibt, dass $f(v_1) \neq f(v_2)$ ist.

Aufgabe 3 Sei V ein K-Vektorraum und $h \in \mathsf{End}(V)$. Definiere

$$\phi_h : \mathsf{End}(V) \to \mathsf{End}(V), g \mapsto gh - hg.$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ_h ein Homomophismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathsf{det}(\phi_h) = 0$ ist.

Aufgabe 4 Berechne alle Potenzen π^k für $k \in \mathbb{N}$ und

(a) $\pi = (135246) \in \mathsf{Sym}(6)$;

(b) $\pi = (12)(345)(6789) \in \mathsf{Sym}(9)$.

Aufgabe 5 Sei V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ und sei $h \in \mathsf{End}(V)$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von h.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume von h.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von h.