13. PRÄSENZÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Aufgabe 1 Es sei V ein unitärer (bzw. euklidischer) Vektorraum mit $\dim V = n$ und $h : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei B eine ON-Basis von V und $A = M_B^B(h)$. Zeigen Sie:

(a) h ist selbstadjungiert genau dann, wenn $A = \overline{A}^t$ (bzw. $A = A^t$) gilt.

(b) h ist unitär (bzw. orthogonal) genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{jk} = \delta_{ij}$$

gilt.

Aufgabe 2 Zeigen Sie: AA^* ist stets hermitesch.

Aufgabe 3 Sei $V = \mathbb{C}^3$ mit Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ und Skalarprodukt f. Es gelte

$$\begin{aligned} f(v_1, v_j) &= 1 \text{ für } j = 1, 2, 3, \\ f(v_2, v_j) &= 2 \text{ für } j = 2, 3, \\ f(v_3, v_3) &= 3. \end{aligned}$$

(a) Sei $h \in \operatorname{End}(V)$ und sei $A = M_B^B(h) = -I_3$. Ist h selbstadjungiert?

(b) Sei $h \in \operatorname{End}(V)$ und sei

$$A = M_B^B(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist h selbstadjungiert? Oder unitär?