

14. PRÄSENZÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Eine orthogonale Matrix ist eine reelle $n \times n$ Matrix A , für die gilt $A^* = A^{-1}$. Eine unitäre Matrix ist eine komplexe $n \times n$ Matrix A , für die ebenso $A^* = A^{-1}$ gilt.

Aufgabe 1 Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}$$

eine unitäre 3×3 -Matrix so, dass $\overline{S}^t AS$ Diagonalgestalt hat, und eine orthogonale 3×3 -Matrix T so, dass für ein $\alpha \in [0, \pi)$ gilt

$$T^t AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale 3×3 -Matrix S so, dass $S^t AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3 Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus $h : V \rightarrow V$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V gibt, für welches h selbstadjungiert ist.

Aufgabe 4 Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Zeigen Sie, dass die Orthogonalprojektion

$$p_U : V = U + U^\perp \rightarrow U, \quad u + w \mapsto u,$$

selbstadjungiert ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume.