3. PRÄSENZÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Aufgabe 1 Sei $V = \mathbb{R}^2,\ L = (a_1, a_2) + \mathbb{R}(u_1, u_2)$ mit $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$. Was ist dann L geometrisch?

(a) Gesucht ist eine Linearform, die (u_1, u_2) auf 0 abbildet.
(b) Geben Sie ein homogenes LGS an, was $\mathbb{R}(u_1, u_2)$ als Loesungsmenge hat.
(c) Finden Sie ein LGS, was L als Loesungsmenge hat.

Aufgabe 2 Wir betrachten im Vektorraum V der Polynome aus $\mathbb{R}[X]$ vom Grade ≤ 1 die Elemente $p_1(x) = 1 + x$ und $p_2(x) = 2 + x$.

(a) Zeigen, Sie dass $B = \{p_1, p_2\}$ eine Basis von V bildet.
(b) Seien $B^* = \{p_1^*, p_2^*\}$ die duale Basis und $f_1(x) = 4 + x,\ f_2(x) = 3 + 5x$. Berechnen Sie $p_i^*(f_j),\ 1 \leq i, j \leq 2$.

Aufgabe 3 Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V = n$ und V^* der Dualraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Die Elemente $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sind linear abhängig in V^*.
(b) Es gibt $v \in V$, $v \neq 0_V$, mit $v_1^*(v) = \ldots = v_n^*(v) = 0_K$.

Aufgabe 4 Ist $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W, so ist $f^* : W^* \to V^*$, $\alpha \mapsto \alpha \circ f$, ebenfalls K-linear.
Sind V und W endlich dimensional mit Basen B bzw. C und ist $A = M_C^B(f)$, so gilt $A^t = M_{B^*}^{C^*}(f^*)$ für die transponierte Matrix A^t.