4. PRÄSENZÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Aufgabe 1 Es seinen $\sigma = (123456)$ und $\tau = (1423)(56)$ zwei Permutationen. Bestimme $\sigma \circ \tau$ und schreibe σ und τ jeweils als Produkt von Transpositionen. Berechne $\operatorname{sgn}(\sigma)$ und $\operatorname{sgn}(\tau)$.

Aufgabe 1' Bestimme für die folgenden Elemente in S_7 jeweils die disjunkte Zykelzerlegung und zwei verschiedene Zerlegungen in Transpositionen sowie das Signum:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 4 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 8 \\ 5x + 3y + 7z &= 7 \\ 4x + 2y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

Ist es lösbar? Falls ja, ist eindeutig lösbar? Bestimme, falls möglich, die Lösungsmenge.

Aufgabe 3 Wir betrachten die folgenden beiden Untervektorräume des Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \}$$

$$U_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + z = 0 \}$$

Finde jeweils eine Basis von U_1, U_2, $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$, $\mathbb{R}^3 / U_1$, $U_1 / U_1 \cap U_2$ und $\mathbb{R}^3 / U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 4 Wir betrachten die folgende Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schreibe die Vektoren der dualen Basis $\{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ als Linearkombinationen der Vektoren der dualen Basis der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5 Bestimme alle Elemente in A_3, S_3 / A_3 und A_4, S_4 / A_4.