Beispiel 2.6(b)

Sei $V = K[x] = \{p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ = Menge der Polynome über K (der Polynomring).

Setze $B := \{1, x, x^2, \dots\}$.

Beh. B ist eine Basis von V.

1. $\langle B \rangle = V$. Das folgt unmittelbar aus der Definition: jedes Polynom ist Linearkombination von geeigneten x^i, $i \in \mathbb{N}_0$.

2. B ist linear unabhängig:

Ang. B ist lin. abh. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $c_1, \dots, c_m \in K$ so, daß $\sum_{i=0}^{m} c_i x^i = 0$ (das 0-Polynom). Wähle m minimal mit dieser Eigenschaft. Dann folgt insbes. $c_m \neq 0$.

Es folgt, dass die Ableitung auch konstant 0 ist: $0 = \sum_{i=1}^{m} c_i i x^{i-1} = \sum_{j=0}^{m-1} c_{j+1}(j+1)x^j$.

Da m mit dieser Eigenschaft minimal gewählt war, folgt $c_{j+1}(j+1) = 0$ für $0 \leq j \leq m-1$.

Also folgt $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$. Also war $m = 0$ und es ist $c_0 1 = 0$. Daraus folgt aber auch $c_0 = 0$ $\lightning$.