# 11. Übungsblatt

**Abgabe: Donnerstag, 13. Juli 2017 vor 10 Uhr**

**Aufgabe 1** (a) Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(a.a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y, z)) = (2x, y + 3)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a.b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g((x, y, z)) = (0, 2y + 3z, 4x)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a.c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h((x, y)) = (y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a.d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $k((x, y)) = (x, -x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $V = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in K\}$ der Vektorraum der Folgen. Definiere

$$S : V \to V \text{ durch } S((a_1, a_2, \ldots)) = (a_2, a_3, \ldots) \text{ und}$$

$$T : V \to V \text{ durch } T((a_1, a_2, \ldots)) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Zeigen Sie $S, T \in Hom(V, V)$. Bestimmen Sie Ker $S$, Ker $T$, Im $S$, Im $T$. Welche der Abbildungen ist ein Epimorphismus, welche ein Monomorphismus?

**Aufgabe 2** Seien $V$ und $W$ isomorphe $K$-Vektorräume und sei $f : V \to W$ ein Vektorraumisomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass $f^{-1} : W \to V$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

(b) Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $V$. Zeigen Sie, dass $C := f(B)$ eine Basis von $W$ ist.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b): Ist $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von $W$, dann ist auch $B := f^{-1}(C)$ eine Basis von $V$.

**Aufgabe 3** Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den $K$-Vektorräumen $V$ und $W$. Zeigen sie:

(a) Ker $f$ ist ein Unterraum von $V$.

(b) Im $f$ ist ein Unterraum von $W$.

Bitte wenden.

**Aufgabe 4** Finden Sie Beispiele für $K$-Vektorräume $V$ und lineare Abbildungen $f \in Hom(V, V)$ so, dass die jeweilige Situation vorliegt.

(a) Ker $f \subseteq$ Im $f$, ker $f \neq \{\mathcal{O}\}$ und Im $f \neq V$.

(b) Im $f \subseteq$ Ker $f$ und Ker $f \neq V$.

(c) $V =$Ker $f \oplus$ Im $f$ und Ker $f \neq \{\mathcal{O}\} \neq$ Im $f$.