3. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 18. Mai 2017 vor 10 Uhr

Aufgabe 1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die modulo n Relation auf $\mathbb{Z}$

$$a \sim b \text{ genau dann, wenn } n \text{ teilt } b - a$$

ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Menge $\{0, \dots, n-1\}$ enthält einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse.

Aufgabe 2 Sei $f : A \to B$ eine Abbildung, X_1, X_2 Teilmengen von A und Y_1, Y_2 Teilmengen von B. Zeigen Sie:

(a) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

(b) $f^{-}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-}(Y_1) \cup f^{-}(Y_2)$.

(c) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.

(d) $f^{-}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-}(Y_1) \cap f^{-}(Y_2)$.

Aufgabe 3 Sei M eine endliche, nicht leere Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung von M nach M. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

f ist injektiv.

f ist surjektiv.

f ist bijektiv.

Aufgabe 4 Die Abbildungen $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 3n + 2 \\ f_2(n) &= n + 1,\ \ n = 1, 3, 5, \dots \\ &\ n - 1,\ \ n = 2, 4, 6, \dots . \end{aligned}$$

Untersuchen Sie, ob es Abbildungen $g_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_i \circ f_i = id$ oder $h_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_i \circ h_i = id$ gibt. Folgern Sie, ob die f_i injektiv bzw. surjektiv sind (für $i = 1, 2$).