6. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 8. Juni 2017 vor 10 Uhr

Aufgabe 1 Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass das allgemeine Assoziativitätsgesetz in G gilt, d.h. dass $|P(a_1, \ldots, a_n)| = 1$ ist.

Aufgabe 2 Beweisen Sie das Untergruppenkriterium:

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine nicht leere Teilmenge von G. Dann ist U eine Untergruppe von G bezüglich $\circ$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

(U1) Für alle $u, v \in U$ gilt stets $u \circ v \in U$.

(U2) Ist $u \in U$, dann ist auch $u^{-1} \in U$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$ bzw. von $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ sind: (Falls dies der Fall ist, dann beweisen Sie es, falls nicht, belegen Sie es durch ein Gegenbeispiel).

(a) $U_1 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $U_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

(c) $U_3 = \{(r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

(d) $U_4 = \{(r, 5r + 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 4 Sei $\mathbb{R}^\star$ die Gruppe der von 0 verschiedenen reellen Zahlen bezüglich der Multiplikation und $\mathbb{R}$ die Gruppe der reellen Zahlen bezüglich der Addition. Prüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind: (Wie oben, falls dies der Fall ist, dann beweisen Sie es, falls nicht, belegen Sie es durch ein Gegenbeispiel).

(a) $f_1 : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^\star, x \mapsto x^4$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^\star, x \mapsto 4x$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4$.

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\star, x \mapsto 4^x$.