7. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 14. Juni 2017 vor 16 Uhr

Aufgabe 1 Seien $(G, \circ)$ und $(H, \star)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

(a) Kern $f := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ ist ein Normalteiler in G.

(b) Es gilt:
Kern $f = \{e_G\}$ genau dann, wenn f ein Monomorphismus ist.

Aufgabe 2 (a) Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{R}^3, +)$ und die Untergruppe $U := \{(r, 0, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ des $\mathbb{R}^3$.

(a.a) Bestimmen Sie die Menge der Linksnebenklassen R^3/U von U im $\mathbb{R}^3$.

(a.b) Verknüpfen Sie zwei beliebige Linksnebenklassen.

(b) Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ und die Untergruppe $m\mathbb{Z}$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$.

(b.a) Bestimmen Sie die Menge der Linksnebenklassen $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ von $m\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$.

(b.b) Bestimmen Sie für $m = 2$ und $m = 3$ die Verknüpfungstabelle von $\mathbb{Z}_m$.

Aufgabe 3 Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass K nullteilerfrei ist.

Aufgabe 4 Bestrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind Unterräume? (Falls dies der Fall ist, dann beweisen Sie es, falls nicht, belegen Sie es durch ein Gegenbeispiel).

(a) $U_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i = a, 1 \leq i \leq n, a \in \mathbb{R}\}$.

(b) $U_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$.

(c) $U_3 = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n a_i = a_n\}$, $n \geq 2$.