9. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 29. Juni 2017 vor 10 Uhr

Aufgabe 1 Sei K ein Körper und sei

$$K[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_1, \dots, a_n \in K, n \in \mathbb{N}_0\},$$

wobei x eine Unbekannte ist.

(a) Zeigen Sie, dass $K[x]$ mit der Polynomaddition und der Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i x^i := \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i \text{ für } \lambda \in K$$

ein K-Vektorraum ist.

(b) Sei $K = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen, sei $p \in K[x]$ und sei f_p die Abbildung $f_p : K \to K, k \mapsto p(k)$. Finden Sie ein $p \in K[x]$ so, dass $p \neq 0$, aber f_p die 0-Abbildung ist.

Aufgabe 2 Welche der Teilmengen des $\mathbb{R}^4$ in (a) und (b) sind linear unabhängig, welche linear abhängig?

(a) $A := \{(1, 1, 1, 4), (2, 7, 3, 1), (0, 5, 2, 1)\}$.

(b) $B := \{(4, 0, 2, 3), (1, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 3), \}$.

(c) Falls die Menge linear unabhängig ist, dann ergänzen Sie sie zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

(d) Geben Sie fünf Vektoren des $\mathbb{R}^4$ an, von denen je vier linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 Sei V der K-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Sei U eine Teilmenge von V und sei der Nullvektor in U. Dann ist U linear abhängig.

(b) Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig. Dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ so, dass v_j Linearkombination der $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n$ ist.

(c) Seien U, M Teilmengen von V mit $U \subseteq M$. Ist U linear abhängig, dann auch M.

(d) Seien U, M Teilmengen von V mit $U \subseteq M$. Ist M linear unabhängig, dann auch U.

Aufgabe 4 Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Menge der $(m \times n)$-Matrizen $M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$. Für $1 \leq k \leq m$ und $1 \leq l \leq n$ sei

$$E_{k,l} := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

die Matrix mit $a_{i,j} = 0$ für $(i,j) \neq (k,l)$ und $a_{i,j} = 1$ für $(i,j) = (k,l)$.

(a) Zeigen Sie, dass
$$B := \{E_{k,l} \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n\}$$
eine Basis von V ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von V.