Probeklausur: Lineare Algebra I

SoSe 2017

Bearbeitungszeit: 60 min

Vorname und Name (bitte leserlich !):

Matrikelnummer:

Bitte beachten Sie:

- Jedes abgegebene Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!
  Namen bitte leserlich in BLOCKSCHRIFT!
- Die besten vier Aufgben werden gewertet.
- (Teil-)Lösungen werden nur mit vollständigem (Teil-)Lösungsweg anerkannt.
- Erlaubte Hilfsmittel sind ein einseitig handgeschriebenes DIN A4 Blatt.
- Es dürfen nur die Definitionen und Aussagen aus der Vorlesung verwendet werden.
- Jede Aufgabe zählt 12 Punkte. Die Klausur ist mit 24 Punkten bestanden.

Aufgabe 1 (a) Definieren Sie, was eine Gruppe ist. (3 Punkte)

(b) Sei $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und für $a + 5\mathbb{Z}$, $b + 5\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_5$ sei

$$(a + 5\mathbb{Z}) +_5 (b + 5\mathbb{Z}) = ((a + b) + 5\mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ eine Gruppe ist. (9 Punkte)

Aufgabe 2 Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$. (6 Punkte)

(b) $A \setminus (B \cap C) = A \setminus B \cup A \setminus C$. (6 Punkte)

Aufgabe 3 (a) Bestimmen Sie auf $\mathbb{Z}$ eine Ordnungsrelation. (4 Punkte)

(b) Bestimmen Sie auf $\mathbb{Z}$ zwei Äquivalenzrelationen. (4 Punkte)

(c) Bestimmen Sie auf $\mathbb{Z}$ eine Relation, die weder Ordnungs- noch eine Äquivalenzrelation ist. (4 Punkte)

Aufgabe 4 Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen B_1 bzw. B_2 eine Basis des jeweiligen K-Vektorraums sind.

(a) $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^4$.

$$B_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \}.$$ (6 Punkte)

(b) $K = \mathbb{Q}$, $V =$ Menge der Folgen, die nur endlich viele Einträge ungleich Null haben. Sei A_i die Folge, die überall ausser an der i-ten Stelle Null ist und der i-ten Stelle habe sie den Eintrag i. $B_2 = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. (6 Punkte)

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für das Gleichungssystem

$$x + y - z = 1$$

$$ax + y + 3z = 1$$

$$x + 2y + 4z = 1.$$

(a) die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems; (6 Punkte)

(b) die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems. (6 Punkte)