Prof. Dr. B. Baumeister
Dipl.-Math. Peter Knorr WS 2009/10

Mathematatik für Informatiker I - Übungsblatt 5

Abgabe bis Montag, den 16. November
in die Briefkästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Sei M die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(i) Zeichnen Sie das Diagramm der Teilerrelation auf der Menge M.
(ii) Bestimmen Sie alle maximalen, minimalen, größten, und kleinsten Elemente.
(iii) Gibt es zu zwei Elementen immer ein Supremum? Gibt es zu zwei Elementen immer ein Infimum? Wie verhält sich dies für die Teilerrelation auf der Menge $\mathbb{N}$?

Aufgabe 2: (4 + 2 Punkte)
(i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
(ii) Formulieren Sie eine allgemeine Formel, die die folgenden Beobachtungen wiedergibt:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 3+5 \\ 3^3 &= 7+9+11 \\ 4^3 &= 13+15+17+19 \end{aligned}$$

(iii*) **Zusatzaufgabe:** Beweisen Sie diese Formel.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Welche der folgenden Operationen $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert eine Halbgruppe auf $\mathbb{Z}$? Existiert ein neutrales Element?

(i) $a \circ b = 2a + b + 1$
(ii) $a \circ b = a + b - 2$
(iii) $a \circ b = 3ab$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Erstellen Sie die Verknüpfungstafel für die Halbgruppe $(A, \circ)$ bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(i) A ist die Menge der Abbildungen der Menge $\{0, 1\}$ in sich selbst. Ist diese Halbgruppe kommutativ? Ist sie eine Gruppe?

(ii) A ist die Menge der bijektiven Abbildungen der Menge $\{-1, 0, 1\}$ in sich selbst. Ist sie eine kommutative (abelsche) Halbgruppe? Ist sie ein Monoid? Ist sie eine Gruppe?

Zusatzaufgabe: (2 Punkte)

Beweisen Sie: Eine Gruppe $(A, \circ)$ ist genau dann kommutativ, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$, wobei a^2 für $a \circ a$ steht.