Prof. Dr. B. Baumeister
Dipl.-Math. Peter Knorr WS 2009/10

Mathematik für Informatiker I - Übungsblatt 6

Abgabe bis Montag, den 23. November
in die Briefkästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(i) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass in der Verknüpfungstabelle von $(G, \circ)$ jedes Element von G in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommt.

(ii) Beweisen Sie: Zwischen zwei Körpern mit je genau vier Elementen gibt es immer einen bijektiven Homomorphismus.

Bemerkung: Zwei Körper, zwischen denen es einen bijektiven Homomorphismus gibt, bezeichnet man als *zueinander isomorph*. Zueinander isomorphe Körper (Ringe, Gruppen) betrachten Mathematiker als identisch. Der Beweis dieser Aufgabe bedeutet also, dass es für Mathematiker nur einen Körper mit genau vier Elementen gibt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Definiere Σ^* als die Menge der abrechenden Folgen mit Einträgen aus dem Körper mit zwei Elementen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Für $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma^*$ definiere

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Zeige:
$(\Sigma^*, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

(a) Welche der folgenden Abbildungen $h : \Sigma^* \to \mathbb{Z}$ sind Homomorphismen von $(\Sigma^*, \oplus)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$?

(i) $h_1((a_i)_{i\in\mathbb{N}})$ = die Anzahl der Einsen in $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(ii) $h_2((a_i)_{i\in\mathbb{N}})$ = die Anzahl der führenden Einsen (der Einsen, die am Anfang von $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ stehen bis die erste Null auftaucht).

(b) Welche der folgenden Abbildungen $h : \Sigma^* \to \mathbb{Z}$ sind Homomorphismen von $(\Sigma^*, \oplus)$ nach $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$?

(iii) $h_3((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = a_1$.

(iv) $h_4((a_i)_{i\in\mathbb{N}})) = a_1 + a_2$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl und $\approx$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$:

$$x \approx y :\Leftrightarrow n \text{ teilt } x - y$$

Sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Menge der Äquivalenzklassen $\{[0], .., [n-1]\}$ dieser Relation. Definiere $[a] + [b] := [a + b]$ und $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$.

Sind $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \cdot)$ bzw. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}, \cdot)$ Gruppen? Begründen Sie Ihre Antwort!