3. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06
Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;
Abgabe: Mi, 09.11.05

(9) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die folgendermaßen definierte Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y, z) = (-5x - 18y - 24z, 4x + 13y + 16z).$$

(a) Bestimmen Sie die Matrizen $M_C^B(f)$ und $M_{C'}^{B'}(f)$ mit

$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)\},\ B' = \{(3, -1, 0), (-1, -1, 1), (-3, 2, -1)\}$

und

$$C = \{(1, 1), (1, -1)\}, C' = \{(1, 2), (2, 0)\}.$$

(b) Berechnen Sie die Matrizen $M_{C'}^{C}(id)$ und $M_B^{B'}(id)$.

(c) Überprüfen Sie, daß gilt

$$M_{C'}^{C}(id) M_C^B(f) M_B^{B'}(id) = M_{C'}^{B'}(f).$$

(10) Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $U = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass

(a) $V/U = \{(0, 0, c, d) + U \mid c, d \in \mathbb{R}\}$.

(b) $V/U = \langle (0, 0, 1, 0) + U, (0, 0, 0, 1) + U \rangle$.

(c) Geben Sie einen Endomorphismus $h \in End(V)$ an, so daß $U = \operatorname{Ker} h$.

(d) Bestimmen Sie von dem Endomorphismus h die Dimension des Bildes $\dim \operatorname{Im} h$.

(11) Zeigen Sie

(a) Sind A und B ähnliche Matrizen in $K^{(n,n)}$, dann gibt es Basen C und D von K^n und eine Abbildung $f \in Hom(V, V)$, so dass $A = M_C^C(f)$ und $B = M_D^D(f)$ gilt.

(b) Die Ähnlichkeitsrelation auf der Menge der $n \times n$-Matrizen $K^{(n,n)}$ ist eine Äquivalenzrelation.

(12) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$