4. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06
Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;
Abgabe: Mi, 16.11.05

(13) Sei $A \in Hom(K^n, K^m)$ als $(m \times n)$-Matrix bzgl. der Standardbasis dargestellt und sei $y \in K^m$, so dass $A^{-1}\{y\} \neq \emptyset$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung.

(b) $rgA = n$.

(14) Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $W = W_1 \oplus W_2$. Weiter sei $F : V \to W$ linear und $F(V_i) \subset W_i$. Setze $n_i := dimV_i$ und $m_i := dimW_i$, für $i = 1, 2$.

Zeigen Sie, dass es Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, wobei A eine $(m_1 \times n_1)$- und B eine $(m_2 \times n_2)$- Matrix ist.

(15) Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ und $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die durch $F(x) = Ax$ definierte lineare Abbildung. Bestimmen Sie Basen $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(16) Seien V ein K-Vektorraum und f_1, f_2 Endomorphismen von V mit

1. $f_1 \circ f_1 = f_1$ und $f_2 \circ f_2 = f_2$
2. $f_1 + f_2 = id_V$
3. $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$

Zeigen Sie, dass gilt $V = f_1(V) \oplus f_2(V)$.