6. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06

Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;

Abgabe: Mi, 30.11.05

Aufgabe 22 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und U ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass dann gilt $(U^{\perp})_{\perp} = U$.

Aufgabe 23 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Der Unterraum $U \subseteq V$ werde von den Vektoren $v_1, .., v_n \in V$ aufgespannt. Gegeben seien weiterhin Elemente $f_1, .., f_n \in V^*$ mit $f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad i \neq j \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass die Vorschrift
$p(x) := x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot v_i$
eine Projektion $p : V \to V$ darstellt, das heißt

$p \circ p = p$
Ker $p = U$ und
$p(V) = \{x \in V \mid f_i(x) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, .., n\}\}$.

Insbesondere ist also $W := p(V)$ ein Komplement zu U in V, d.h. es gilt $V = U \oplus W$.

(b) Zeigen Sie umgekehrt: Ist W ein Komplement zu U in V, so gibt es Elemente $g_1, .., g_n \in V^*$, so dass
$W = \{x \in V \mid g_i(x) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, .., n\}\}$ erfüllt ist.

Aufgabe 24 Gegeben sind die beiden Permutationen
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ und $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\pi \circ \sigma^{-1}$

(b) Stellen Sie π als Hintereinanderschaltung von disjunkten Zyklen dar.

(c) Stellen Sie σ als Hintereinanderschaltung von Transpositionen dar.

(d) Berechnen Sie π^4 und π^{1001}.

Aufgabe 25 (a) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{N}$, so dass es einen k-Zyklus in der symmetrischen Gruppe S_4 gibt. Geben Sie für jedes mögliche $k \in \mathbb{N}$ ein Beispiel an!

(b) Bestimmen Sie einen Homomorphismus mit möglichst kleinem Kern von S_4 nach $(\mathbb{Z}_2, +)$.(Beachten Sie dabei, dass sich jedes Element aus S_4 als Produkt von Transposotionen darstellen läßt.)