14. Übung: Lineare Algebra II

Wintersemester 2005/06
Barbara Baumeister, Cornelia Dangelmayr;
Abgabe: Mi, 08.02.06

Aufgabe (55) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{(3,3)}$.

(a) Bestimmen Sie alle Jordanschen Normalformen von A.

(b) Zeigen Sie, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn sie dasselbe charakterstische und dasselbe Minimalpolynom haben. Gilt das auch für Matrizen $D \in \mathbb{C}^{(k,k)}, k \geq 4$?

Aufgabe (56) (a) In welcher Beziehung stehen die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms eines Endomorphismus und des adjungierten Endomorphismus?

(b) Sei $A = (a_{i,j})$ eine hermitesche $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie:

  (a) Alle Hauptdiagonalelemente $a_{i,i}$ von A sind reell.

  (b) Das charakterstische Polynom von A hat reelle Koeffizienten.

  (c) Die Determinante und die Spur von A sind reell.

Aufgabe (57) Es sei V der Vektorraum der $(n \times n)$- Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass V mit $(A, B) := spur(B^T A)$ ein euklidischer Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie für $n = 2$ eine Orthonormalbasis von V.

(c) Bestimmen Sie für $n = 2$ das orthogonale Komplement $U^\perp$ des Untervektorraums U der symmetrischen Matrizen, sowie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Aufgabe (58) Sei $(V, <>)$ ein euklidischer (unitärer) Vektorraum endlicher Dimension und $\phi \in End(V)$ normal. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt: $< \phi(x), \phi(y) > \quad = \quad < \phi^*(x), \phi^*(y) >$.

(b) x ist Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert λ genau dann, wenn x Eigenvektor von ϕ^* zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ ist.
(Hinweis: berechnen Sie $< \phi(x) - \lambda x, \phi(x) - \lambda x >$.)

(c) Ist der Untervektorraum U von V ϕ-invariant, dann ist $U^\perp$ ϕ^*-invariant.