8. Übungsblatt

Abgabe: Die, 19.12.06 vor der Vorlesung in das Fach von Andrea Wiese

Aufgabe 1 Lösen Sie mit erzeugenden Funktionen (und nicht mit Induktion) die Rekursion:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0, n \geq 1, \quad a_0 = 1.$$

Aufgabe 2 Sei $\mu : \mathbf{N} \to \{-1, 0, 1\}$ die Möbiusfunktion:

$$\mu(d) = \{ \begin{array}{ll} 1 & d \text{ ist das eine Produkt einer geraden Anzahl verschiedener Primzahlen} \\ -1 & d \text{ ist das eine Produkt einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen} \\ 0 & \text{sonst} \end{array}.$$

Seien f und g Funktionen, die für alle natürlichen Zahlen definiert sind und es gelte:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \qquad \text{für alle } n \in \mathbf{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann folgt

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}).$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Fibonaccizahlen:

(a) $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$

(b) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}.$

(c) $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$

Aufgabe 4 Sei A_n die Anzahl der Belegungen eines $2 \times n$-Rechteckes mit 1×2 Dominosteinen. Bestimmen Sie eine Rekursion für A_n und berechnen Sie A_n.