2. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 27.10.11

Aufgabe 1 Autokennzeichen von Bielefeld starten mit den Buchstaben BI, dann folgen zwei Buchstaben und schließlich kommen 4 Ziffern.

(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es für die zwei Buchstaben?

(b) Wieviele Möglichkeiten gibt es für die vier Ziffern?

(c) Wieviele Nummernschilder kann die Stadt Bielefeld höchstens vergeben?

Aufgabe 2 Führen Sie den Beweis der Vandermonde-Identität

$$\text{für } n, r, s \in \mathbb{N}, n \leq r, s \text{ gilt } \binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$$

ausführlich aus.

Aufgabe 3 Zeigen Sie den Binomialsatz

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ durch vollständige Induktion.

Aufgabe 4 Es sind n paarweise disjunkte Mengen S_i gegeben. Die erste habe a_1 Elemente, die zweite a_2, usw.

(a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Mengen, die höchstens ein Element aus jedem S_i enthalten, gleich $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$ ist.

(b) Wenden Sie das Ergebnis auf das folgende zahlentheoretische Problem an: Sei $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ die Primfaktorzerlegung von n. Dann hat n genau $t(n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i+1)$ viele Teiler.

(c) Folgern Sie daraus, dass n genau dann eine Quadratzahl ist, wenn $t(n)$ ungerade ist.