Übungen zur Vorlesung
Numerik I
Sommersemester 2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 3
27.4.2016

Abgabe: Mittwoch, 4.5.2016, 10:00 Uhr in das jeweilige Postfach in V3-128
Elena Isaak, `eisaak@math.uni-bielefeld.de`, Postf. 92
Christian Vieth, `cvieth@math.uni-bielefeld.de`, Postf. 113
André Wilke, `awilke@math.uni-bielefeld.de`, Postf. 179

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 9x^4 - y^4 + 2y^2 \quad \text{und} \quad \bar{x} = 10864, \quad \bar{y} = 18817. \tag{1}$$

Zusätzlich betrachten wir den folgenden Algorithmus zur Auswertung dieser Funktion

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = F^3 \circ F^2 \circ F^1 \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

mit

$$F^1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^4\\y^4\\y^2\end{pmatrix}, \quad F^2\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9a\\-b+2c\end{pmatrix}, \quad F^3\begin{pmatrix}d\\e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d+e\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die relative, komponentenweise Konditionszahl $\hat{\kappa}\left(F, \begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}\right)$.

(b) Analysieren Sie die Kondition des obigen Algorithmus zur Auswertung von F an der Stelle $\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$.

(c) Führen Sie den Algorithmus numerisch aus und kommentieren Sie den Approximationsfehler.

Hinweise:

- Das Beispiel ist der folgenden Quelle entnommen: *S.M. Rump. Wie zuverlässig sind die Ergebnisse unserer Rechenanlagen? Jahrbuch Überblicke Mathematik, 163-168, 1983.*
- Der exakte Wert von $F\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$ kann in MATLAB unter Verwendung des Befehls `int64` berechnet werden.
- Sämtliche Konditionszahlen sind für $\delta = 0$, siehe Skript, Formel (2.22) zu bestimmen.

(6 Punkte)

Aufgabe 8:

(A) Gegeben sei das Polynom, welches sich durch die Setzung $y = t$ und $x = t - (\bar{y} - \bar{x})$ in (1) ergibt:

$$p(t) = 8t^4 - 286308t^3 + 3415511288t^2 - 18109040838372t + 36005300446893129. \quad \textbf{(2)}$$

Werten Sie dieses Polynom an der Stelle $\bar{t} = 18817$ unter Verwendung der folgenden Algorithmen aus:

(A.1) Auswertung von (2) von links nach rechts.

(A.2) Auswertung von (2) von rechts nach links.

(A.3) Auswertung von (2) mit dem Horner-Schema.

Diskutieren Sie abschließend die auftretenden Approximationsfehler.

(B) Werten Sie für $m = 1, \ldots, 200$ und die Koeffizienten $a_i = \frac{1}{2^i}$, $i = 0, \ldots, m$ das Polynom $p(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i$ an der Stelle $\bar{t} = 2$ aus.

Führen Sie diese Polynomauswertungen jeweils 1000 mal mit dem Horner-Schema und mit einer direkten Auswertung wie in Aufgabenteil (A.1) aus. Messen Sie mit den MATLAB-Befehlen `tic` und `toc` die benötigten Rechenzeiten und illustrieren Sie diese Zeiten in einer aussagekräftigen Grafik.

(6 Punkte)

Aufgabe 9:

(i) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Datenpaaren

$$(-2, 42), \quad (-1, 6), \quad (0, 2), \quad (1, 6), \quad (2, 42)$$

unter Verwendung der Lagrangeschen Darstellung und überführen Sie dieses Polynom in die Monomdarstellung.

(ii) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ und sei p ein Polynom mit $\mathrm{grad}(p) \leq m$, das mindestens $m + 1$ paarweise verschiedene Nullstellen besitzt.

Beweisen Sie (unter Verwendung des Satzes von Rolle) die folgenden Aussagen:

(ii.i) Für $i \in \{0, \ldots, m\}$ ist $p^{(i)}$ ein Polynom mit $\mathrm{grad}(p^{(i)}) \leq m - i$, das mindestens $m - i + 1$ paarweise verschiedene Nullstellen besitzt. (Hierbei bezeichnet $p^{(i)}$ die i-te Ableitung von p.)

(ii.ii) Es gilt: $p(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)