

# Numerik Dynamischer Systeme

**Prof. Dr. W.–J. Beyn**

**Universität Bielefeld  
Fakultät für Mathematik**

**Sommersemester 2016**



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Endlich- und unendlichdimensionale dynamische Systeme</b>	<b>5</b>
1	Grundbegriffe dynamischer Systeme . . . . .	7
1.1	Abstrakte Definition . . . . .	7
1.2	Erzeuger und Vektorfelder . . . . .	11
1.3	Parameterabhängige und nichtautonome Systeme . . . . .	15
2	Asymptotisches Verhalten dynamischer Systeme . . . . .	17
2.1	Stetige und glatte dynamische Systeme, periodische Orbits . . . . .	17
2.2	Invariante Mengen . . . . .	20
2.3	Limesmengen . . . . .	26
2.4	Asymptotische Stabilität . . . . .	28
2.5	Attraktoren . . . . .	34
3	Numerische Fragestellungen . . . . .	40
3.1	Asymptotisches Verhalten von Einschrittverfahren . . . . .	40
3.2	Numerische Berechnung von invarianten Mengen . . . . .	43
4	PDEs als dynamische Systeme . . . . .	50
4.1	Einige Funktionenräume . . . . .	50
4.2	Wellengleichungen und stetige Halbgruppen . . . . .	52
4.3	Parabolische Anfangswertaufgaben . . . . .	57
4.4	Allgemeinere Aufgabenstellungen . . . . .	61
<b>II</b>	<b>Langzeitverhalten numerischer Integrationsverfahren</b>	<b>66</b>
1	Steife Differentialgleichungen und Stabilitätsgebiete . . . . .	66
1.1	Beispiele . . . . .	66
1.2	Stabilitätsfunktion für Runge–Kutta–Verfahren . . . . .	70
1.3	Stabilitätsgebiete linearer Mehrschrittverfahren . . . . .	76

2	Dynamik in der Nähe von Gleichgewichten . . . . .	79
2.1	Gleichgewichte und Konsistenzfehler . . . . .	79
2.2	Der asymptotische stabile Fall . . . . .	84
2.3	Der Fall der Sattelpunkte . . . . .	88
3	Die Approximation von Attraktoren . . . . .	99
3.1	Existenz positiv invarianter Mengen . . . . .	99
3.2	Oberhalbstetigkeit von Attraktoren . . . . .	101

### **III Diskrete Approximationen und Randwertaufgaben** **107**

1	Die Theorie der diskreten Approximationen . . . . .	110
1.1	Grundlegende Eigenschaften . . . . .	110
1.2	Konvergenz linearer Operatoren . . . . .	114
1.3	Konvergenztheorie für lineare Gleichungen . . . . .	118
1.4	Kompakte und reguläre Konvergenz . . . . .	121
1.5	Anwendung auf Randwertaufgaben . . . . .	124
2	Nichtlineare Randwertaufgaben und Operatorgleichungen . . . . .	130
2.1	Nichtlinearer Konvergenzsatz für diskrete Approximationen . . . . .	130
2.2	Eine Anwendung auf nichtlineare Randwertaufgaben . . . . .	133
2.3	Ein globaler nichtlinearer Konvergenzsatz . . . . .	136
2.4	Anwendung auf Eigenwertaufgaben . . . . .	139
3	Die Finite-Elemente-Methode für elliptische Randwertaufgaben . . . . .	145
3.1	Ein Membranproblem als Variationsaufgabe . . . . .	145
3.2	Variationsprobleme im Hilbertraum . . . . .	147
3.3	Anwendung auf schwache Randwertprobleme . . . . .	152
3.4	Allgemeine lineare schwache Randwertprobleme . . . . .	155
3.5	Das Galerkin-Verfahren als diskrete Approximation . . . . .	156

# Kapitel I

## Endlich- und unendlichdimensionale dynamische Systeme

Gegenstand dieser Vorlesung ist die numerische Approximation von dynamischen Systemen. Unter einem dynamischen System auf einer **Zustandsmenge**  $X$  (Zustandsraum, Phasenraum; i.a. nur ein topologischer Raum) versteht man eine Familie von Abbildungen

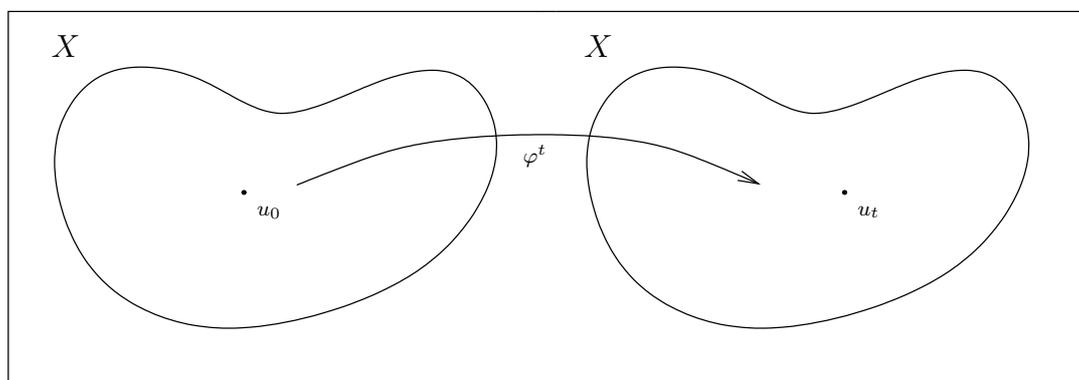
$$\varphi^t : X \longrightarrow X, \quad t \in \mathbb{T}, \\ x \longmapsto \varphi^t(x),$$

wobei  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$  ist, mit den Halbgruppeneigenschaften

$$\varphi^0(u) = u \quad \forall u \in X, \\ \varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{T}.$$

Im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}_+$  hat man ein **kontinuierliches** im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{N}$  ein **diskretes dynamisches System**.

Wir stellen uns dabei vor, dass  $\varphi^t(u_0) =: u_t$  den Zustand eines Systems zur Zeit  $t \in \mathbb{T}$  angibt, das sich zur Zeit  $t = 0$  im Zustand  $u_0$  befindet.



In der Theorie dynamischer Systeme interessiert man sich nicht nur für einzelne Trajektorien bzw. Orbits

$$\{u_t = \varphi^t(u_0) : t \in \mathbb{T}\},$$

## 6 Endlich- und unendlichdimensionale dynamische Systeme

sondern auch für das Langzeitverhalten

$$\varphi^t(u_0) \longrightarrow? \quad \text{für } t \rightarrow \infty \text{ (oder auch } t \rightarrow -\infty)$$

möglichst vieler  $u_0 \in X$ .

Bei einer numerischen Approximation wird oft ein kontinuierliches von einem diskreten dynamischen System approximiert:

$$\varphi^{\Delta t}(u) \approx \Phi_{\Delta t}(u), \quad \Delta t \text{ Zeitschrittweite}$$

und es entsteht die Frage, wie sich das asymptotische Verhalten der diskreten Folge

$$v^{n+1} = \Phi_{\Delta t}(v^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad v^0 = u^0$$

von dem der entsprechenden Folge

$$u^{n+1} = \varphi^{\Delta t}(u^n), \quad n = 0, 1, \dots$$

unterscheidet. Betrachtet man ein konsistentes Einschrittverfahren der Ordnung  $p$  wie in der Vorlesung Numerik II, so ergibt sich für die Flussapproximation (vgl. Kapitel II, Abschnitt 2.2)

$$\Phi_{\Delta t}(v) = \varphi^{\Delta t}(v) + \mathcal{O}(\Delta t^{p+1}),$$

wobei die Konstante vor  $\Delta t^{p+1}$  von  $v \in X$  abhängen kann. In der Vorlesung Numerik II haben wir daraus Fehlerabschätzungen für den Konvergenzfehler  $v^n - u^n$  hergeleitet. Diese geben jedoch nur auf endlichen Teilintervallen  $0 \leq n\Delta t \leq T$  brauchbare Ergebnisse, da sie einen Faktor  $e^{LT}\Delta t^p$  enthalten ( $L$  eine Lipschitzkonstante).

Bis hierher haben wir nur den **zeitlichen Approximationsprozess** angesprochen. Wenn der Zustandsraum  $X$  **unendlich dimensional** (oder sehr hochdimensional) ist, so muss  $\varphi^t$  zusätzlich räumlich approximiert werden. D.h. der hochdimensionale Raum  $X$  wird durch niederdimensionale Räume

$$X_k \subset X, \quad k \in \mathbb{N}$$

und  $\varphi^t$  selbst auf  $X_k$  definierte Flüsse durch

$$\varphi_k^t : X_k \rightarrow X_k$$

approximiert.

Wie wir in Kapitel III sehen werden, tritt dieser Fall typischerweise bei **partiellen** Differentialgleichungen auf. Es entsteht das Problem das asymptotische Verhalten ( $t \rightarrow \infty$ ) des niedrigdimensionalen Flusses

$$\varphi_k^t(u_k^0), \quad u_k^0 \text{ eine Projektion von } u^0 \in X \text{ auf } X_k$$

(**räumlicher Approximationsprozess**) mit dem von  $\varphi^t(u^0)$  in Beziehung zu setzen. Schließlich ergibt sich daraus die Frage, was geschieht, wenn man beide Approximationsprozesse gleichzeitig durchführen muss.

In dieser Vorlesung wird versucht, die auftretenden Approximationsfragen aus einem einheitlichen Gesichtspunkt darzustellen. Neu sind dabei im Vergleich mit einer Vorlesung zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen die beiden folgenden Themen:

- 1.) es wird das Langzeitverhalten  $t \rightarrow \pm\infty$  untersucht.
- 2.) der Zustandsraum selbst muss approximiert werden.

Eine erste systematische Übersicht zur Frage 1 im endlichdimensionalen Fall enthält die Monographie von STUART und HUMPHRIES [24]. Die Frage 2 führt auf die numerische Approximation partieller Differentialgleichungen, für die es eine Vielzahl einzelner Darstellungen gibt [3, 4, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 19, 22]. Hierbei wird allerdings der Langzeitaspekt nur selten behandelt. Diese Vorlesung dient daher auch dem Ziel, Grundlagen für eine gemeinsame Behandlung der beiden Fragenkomplexe bereitzustellen.

# 1 Grundbegriffe dynamischer Systeme

## 1.1 Abstrakte Definition

Für die Zeitachse verwenden wir die folgenden vier Fälle

$$\mathbb{T} = \begin{cases} \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \\ \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \\ \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} \end{cases}$$

In jedem Fall ist  $\mathbb{T}$  eine **kommutative Halbgruppe**:

$$0 \in \mathbb{T}, 0 + t = t \forall t \in \mathbb{T}; t, s \in \mathbb{T} \Rightarrow t + s = s + t \in \mathbb{T},$$

im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$  sogar eine **Gruppe**.

Von dem Evolutionsoperator  $\varphi^t$  fordern wir die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \varphi^0(u) &= u, & u &\in X, \\ \varphi^t(\varphi^s(u)) &= \varphi^{s+t}(u), & s, t &\in \mathbb{T} \quad (\text{Halbgruppeneigenschaft}), \end{aligned}$$

die wir zur Grundlage einer Definition machen.

**Definition 1.1.** *Ein Dynamisches System (DS) ist ein Tripel  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  mit einem Zustandsraum  $X$  und einer Familie von Operatoren*

$$\varphi^t : \begin{array}{l} X \longrightarrow X, \\ u \longmapsto \varphi^t(u), \end{array} t \in \mathbb{T},$$

die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (D0)  $\varphi^0(u) = u \quad \forall u \in X,$
- (D1)  $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{T}.$

**Bemerkung 1.2.** a) Im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  bezeichnet man  $\varphi^t$  als einen **Fluss** und im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$  als einen **Halbfluss**.

b) Im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$  erhält man aus (D0) und (D1):

$$\begin{aligned} \varphi^t \circ \varphi^{-t} &\stackrel{(D1)}{=} \varphi^{t+(-t)} = \varphi^0 \stackrel{(D0)}{=} \text{id} = \varphi^{-t} \circ \varphi^t \quad \forall t \in \mathbb{T} \\ \Rightarrow \varphi^t &\text{ bijektiv, } (\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Daher wird  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  in diesen Fällen auch als **invertierbares DS** bezeichnet.

**Beispiele.** 1.  $X = \mathbb{R}^m, \mathbb{T} = \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,m}$

$$\varphi^t(u) = e^{tA}u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!}$$

linearer Fluss:  $\varphi^t : X \rightarrow X$  linear.

Überprüfen der Eigenschaften:

$$\varphi^0(u) = e^{0 \cdot A}u = u, \tag{D0}$$

$$\varphi^t \circ \varphi^s(u) = e^{tA}(e^{sA}u) = e^{tA+sA}u = e^{(t+s)A}u. \tag{D1}$$

Dabei wurde die für kommutierende Matrizen  $A, B$  geltende Eigenschaft  $e^A e^B = e^{A+B}$  benutzt.

2.  $X = \mathbb{R}^m, \mathbb{T} = \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{m,m}, \varphi^t(u) = A^t u, u \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{N}$

Überprüfen der Eigenschaften:

$$\varphi^0 = A^0 = \text{id}, \tag{D0}$$

$$\varphi^t \circ \varphi^s = A^t A^s = A^{t+s}. \tag{D1}$$

Falls  $A$  invertierbar ist, so ist  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  zulässig und es gilt:

$$\varphi^{-1}(u) = A^{-1}u,$$

$$\varphi^{-n}(u) = (A^{-1})^n u = A^{-n}u.$$

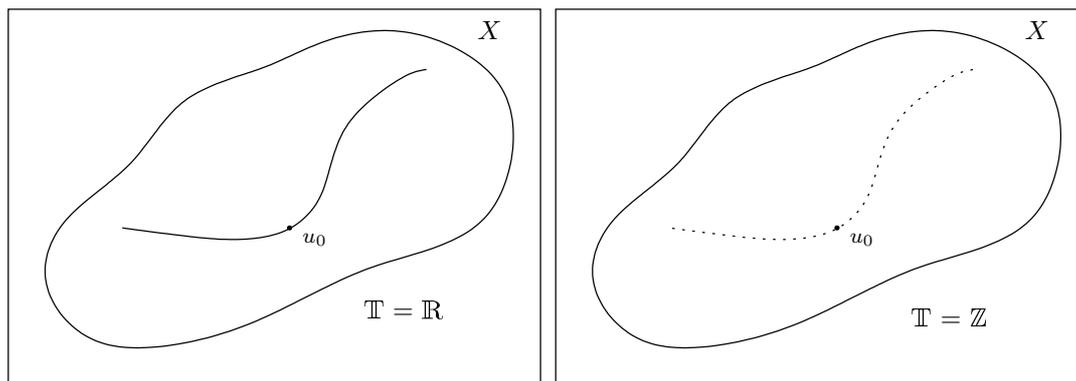
**Definition 1.3.** Für ein DS  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  und  $u_0 \in X$  heißt  $\gamma(u_0) = \{\varphi^t(u_0) : t \in \mathbb{T}\} \subset X$  der zu  $u_0$  gehörige **Orbit**.

**Beobachtung:** In einem invertierbaren DS gilt für zwei Orbits  $\gamma(u), \gamma(v), u, v \in X$  entweder  $\gamma(u) \cap \gamma(v) = \emptyset$  oder  $\gamma(u) = \gamma(v)$ , das heißt, sie sind entweder identisch oder disjunkt.

**Beweis:** Angenommen,  $\gamma(u) \cap \gamma(v) \neq \emptyset$ , also existieren  $s, t \in \mathbb{T}$  mit  $\varphi^t(u) = \varphi^s(v)$ . Dann gilt für alle  $\tau \in \mathbb{T}$ :

$$\varphi^\tau(u) = \varphi^{\tau-t}(\underbrace{\varphi^t(u)}_{\varphi^s(v)}) = \varphi^{\tau-t+s}(v) \in \gamma(v),$$

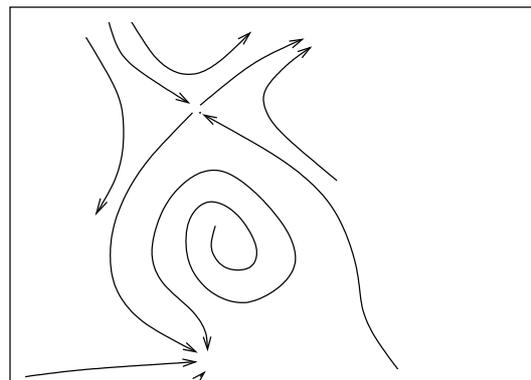
also  $\gamma(u) \subset \gamma(v)$  und aus Symmetriegründen  $\gamma(v) \subset \gamma(u)$ . ■



Bei geeigneter Wahl von Repräsentanten  $u_0$  kann man also  $X$  als eine disjunkte Vereinigung von Orbits schreiben

$$X = \dot{\bigcup}_{u_0} \gamma(u_0).$$

Die Gesamtheit der verschiedenen Orbits bezeichnet man auch als **Phasenbild** und veranschaulicht sie nach Möglichkeit.



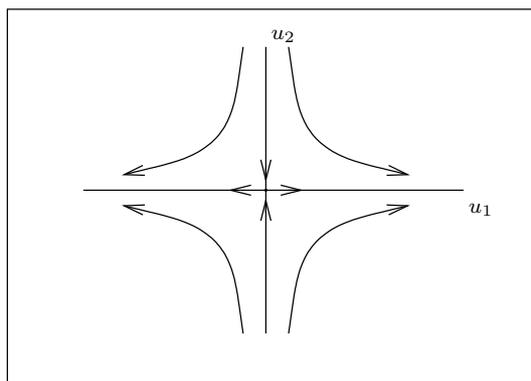
*Phasenbild mit Orbits,  
Fixpunkte sind auch Orbits.*

**Beispiele.** 3.  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ,  $\varphi^t(u) = e^{tA}u$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu < 0 < \lambda, \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix},$$

$$u = (u_1, u_2), \quad \varphi^t(u) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda}u_1 \\ e^{t\mu}u_2 \end{pmatrix}.$$

4. *Symbolisches Dynamisches System*



Phasenbild eines Sattels.

Die Zustände sind biunendliche Folgen  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $u_n \in \{0, 1\}$ , zum Beispiel  $u = (\dots 10100101110 \dots)$ . Wir setzen  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ ,

$$d(u, v) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|u_i - v_i|}{2^{|i|}} \quad \text{ist eine Metrik, bezüglich der } X \text{ vollständig und kompakt wird.}$$

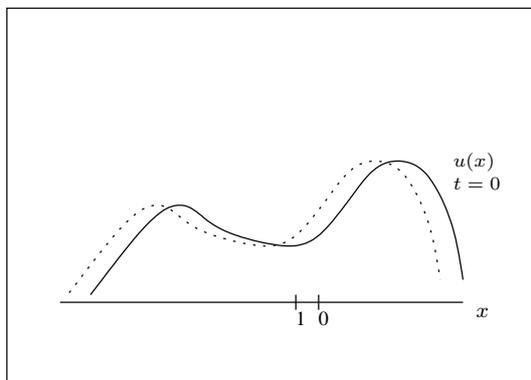
Die Abbildung  $\varphi^t$  ist der sogenannte Bernoulli-Shift  $\varphi^t(u)_i = u_{i+t}$ , ( $t \in \mathbb{Z} = \mathbb{T}$ )  
Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} u &= (\dots 01\underline{0}11 \dots), \\ \varphi^1 u &= (\dots 10\underline{1}1 \dots). \end{aligned}$$

Die Eigenschaften (D0) und (D1) sind offensichtlich.

$$5. \quad L_2(\mathbb{R}) = \left\{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar, } \|u\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

Banachraum,  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ,



$$\begin{aligned} (\varphi^t u)(x) &= u(x+t), & x \in \mathbb{R}, \\ \varphi^0 u(x) &= u(x+0) = u(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\varphi^t(\varphi^s u) = \varphi^t(u(\cdot + s)) = u(\cdot + t + s) = \varphi^{t+s}(u).$$

Die letzten beiden Beispiele sind unendlich-dimensional.

## 1.2 Erzeuger und Vektorfelder

**diskreter Fall:** Sei  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , es reicht  $\varphi := \varphi^1$  zu kennen, da

$$t > 0: \quad \varphi^t = \varphi^1 \circ \varphi^{t-1} = \dots = \underbrace{\varphi^1 \circ \dots \circ \varphi^1}_{t\text{-mal}} = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{t\text{-mal}},$$

$$t < 0: \quad \varphi^t = (\varphi^{-t})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-t} = \underbrace{\varphi^{-1} \circ \dots \circ \varphi^{-1}}_{-t\text{-mal}}.$$

„Potenzen“ entsprechen also Hintereinanderausführungen.

**Umgekehrt:** Ist  $\varphi : X \rightarrow X$  bijektiv gegeben, so wird durch  $\varphi^t := \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{t\text{-mal}}$  für

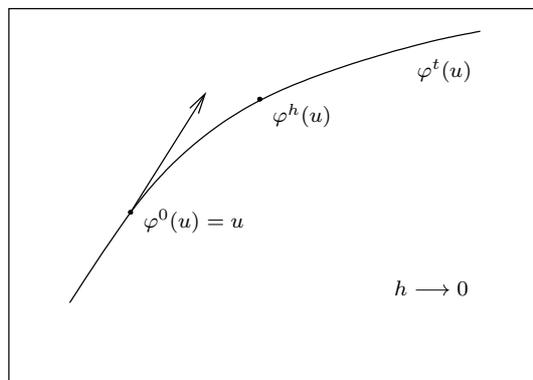
$t > 0$  und  $\varphi^t := \underbrace{\varphi^{-1} \circ \dots \circ \varphi^{-1}}_{-t\text{-mal}}$  für  $t < 0$  ein invertierbares diskretes DS gegeben.

$\varphi = \varphi^1$  heißt der **Erzeuger des DS**.

**kontinuierlicher Fall:** Sei  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$  und  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  ein DS. Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &\longrightarrow X, \\ t &\longmapsto \varphi^t(u_0) \end{aligned}$$

für jedes  $u_0 \in X$  differenzierbar in  $\mathbb{T}$  und sei  $X$  ein Banachraum.



Bilde

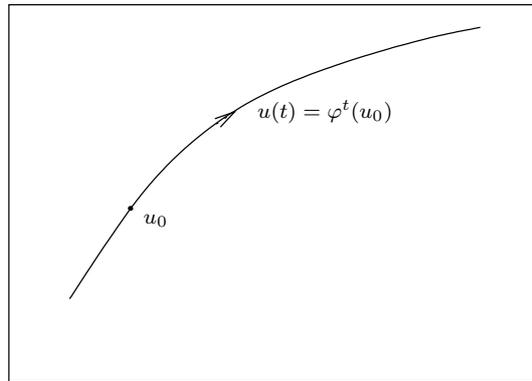
$$(1.1) \quad \left. \frac{d}{dt} \varphi^t(u_0) \right|_{t=0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{T} \\ h \neq 0}} \frac{\varphi^h(u_0) - \varphi^0(u_0)}{h} =: f(u_0) \in X.$$

Anschaulich ist  $f(u_0)$  der Tangentialvektor in  $u_0$  an den Orbit  $\gamma(u_0)$ .

**Definition 1.4.** Falls dieser Grenzwert für alle  $u_0 \in X$  existiert, so heißt  $f : X \rightarrow X$  der **infinitesimale Erzeuger (infinitesimal generator)** des kontinuierlichen DS.  $f$  heißt auch **zugehöriges Vektorfeld** auf  $X$ .

**Lemma 1.5.** Sei  $f$  infinitesimaler Erzeuger von  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$ ,  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ . Dann löst  $u(t) = \varphi^t(u_0)$ ,  $t \in \mathbb{T}$  die Anfangswertaufgabe

$$(1.2) \quad \dot{u}(t) = f(u(t)), \quad t \in \mathbb{T}, \quad u(0) = u_0.$$



**Beweis:** Wegen (D0) ist  $u(0) = \varphi^0(u_0) = u_0$  klar. Für  $t \in \mathbb{T}$  folgt aus (1.1) und (D1)

$$\begin{aligned} f(u(t)) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} (\varphi^h(u(t)) - u(t)) &= \lim_{\substack{h \neq 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{1}{h} (\varphi^{t+h}(u_0) - u(t)) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)) = \dot{u}(t). \end{aligned}$$

■

In den Anwendungen ist in der Regel die Differentialgleichung (1.2) und damit das Vektorfeld  $f$  gegeben und man ist an der Lösung  $u(t) = \varphi^t(u_0)$  interessiert. Wir notieren den aus dem Fortsetzungssatz (vgl. Numerik II, Kapitel I) folgenden Satz für  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}_+$ .

**Satz 1.6.** Sei  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$  und  $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  lokal lipschitzbeschränkt und  $\mathbb{T} \subset J(u_0) \forall u_0 \in \mathbb{R}^m$ . Hierbei bezeichnet  $J(u_0) \subset \mathbb{R}$  das maximale Existenzintervall der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$(1.3) \quad \dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0.$$

Dann definieren die eindeutigen Lösungen  $u(t) =: \varphi^t(u_0)$  ein kontinuierliches DS auf  $X = \mathbb{R}^m$ .

**Beweis:** Die Bedingung (D0)  $\varphi^0(u_0) = u_0$  ist trivial und es bleibt (D1) zu zeigen. Sei  $s \in \mathbb{T}$  fest,  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ . Dann löst  $v(t) = \varphi^t(\varphi^s(u_0))$ ,  $t \in \mathbb{T}$  die Anfangswertaufgabe

$$\dot{v} = f(v), v(0) = \varphi^s(u_0).$$

Die Funktion  $w(t) := \varphi^{t+s}(u_0) = u(t+s)$  löst ebenfalls

$$\dot{w}(t) = \dot{u}(t+s) = f(u(t+s)) = f(w(t)), w(0) = \varphi^s(u_0).$$

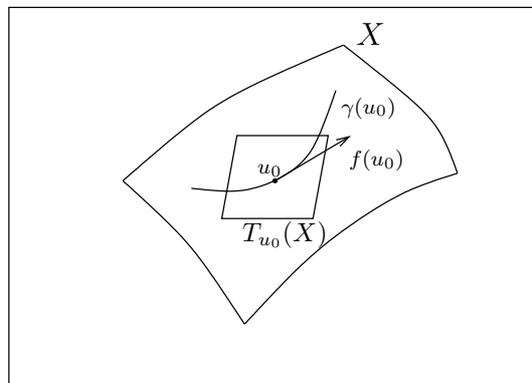
Aus der eindeutigen Lösbarkeit folgt  $v = w$  und damit  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s \forall s, t \in \mathbb{T}$  ■

Der hier dargestellte einfache Zusammenhang zwischen Fluss und Vektorfeld wird uns in allgemeinen Situationen, die auch in praktischen Fällen wirklich auftreten, noch vor Probleme stellen. Die Komplikationen sind:

- 1.) In vielen Beispielen ist  $\mathbb{T} \subset J(u_0) \forall u_0$  falsch. Hier kann man sich helfen, in dem man zu lokalen DS übergeht (siehe [2]). Ein **lokales dynamisches System** liegt vor, wenn zu jedem  $u \in X$  ein Intervall  $J(u) \subset \mathbb{R}$  und zu jedem  $t \in J(u)$  ein  $\varphi^t(u) \in X$  gegeben ist mit

$$\begin{aligned} \text{(D0}_{loc}) \quad & 0 \in J(u), & \varphi^0(u) = u, \forall u \in X, \\ \text{(D1}_{loc}) \quad & s \in J(u), t \in J(\varphi^s(u)) \Rightarrow t+s \in J(u), & \varphi^{t+s}(u) = \varphi^t(\varphi^s(u)). \end{aligned}$$

- 2.)  $X \subset \mathbb{R}^m$  ist keine offene Menge, sondern z.B. eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^m$  mit  $\dim X = k$ .



Aus der Setzung (1.1) folgt für  $u(t) = \varphi^t(u_0)$

$$f(u_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(u(h) - u(0)) \in T_{u_0}(X),$$

wobei  $T_{u_0}(X)$  den *Tangentialraum an X im Punkt  $u_0$*  bezeichnet.

Die 'richtige' Verallgemeinerung von (1.2) ist also der Fall, dass das Vektorfeld

$$f: \begin{array}{l} X \longrightarrow TX, \\ u \longmapsto T_u(X), \end{array} \quad TX = \{(u, v) : u \in X, v \in T_u(X)\}$$

jedem Vektor  $u \in X$  einen Vektor im entsprechenden Tangentialraum  $T_u(X)$  zuordnet.

3.) Der Grenzwert  $f(u_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\varphi^h(u_0) - u_0)$  existiert nicht für alle  $u_0 \in X$ .

Als ein Beispiel für diese Situation betrachten wir Beispiel 5 aus Abschnitt 1.2

$$X = L_2(\mathbb{R}), [\varphi^t(u)](x) = u(t+x).$$

Der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u_0(x+h) - u_0(x))$$

existiert (sowohl punktweise für  $x \in \mathbb{R}$  wie auch bezüglich der  $L^2$ -Norm), wenn wir für  $u_0$  Differenzierbarkeitsannahmen machen. Es reicht z. B. aus, dass  $u_0 \in Y := C_0^1(\mathbb{R})$  eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger ist

$$C_0^1(\mathbb{R}) = \{u \in C^1(\mathbb{R}) : \exists K = K(u) \text{ mit } u(x) = 0 \text{ für } |x| > K\}.$$

Für  $u_0 \in C_0^1(\mathbb{R})$  gilt offensichtlich  $u_0'(x) = 0$  für  $|x| > K = K(u_0)$  sowie mit dem Mittelwertsatz, Cauchy-Schwarz und Fubini

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h}(u_0(\cdot + h) - u_0) - u_0' \right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^1 u_0'(x + \tau h) - u_0'(x) d\tau \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |u_0'(x + \tau h) - u_0'(x)|^2 d\tau dx \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |u_0'(x + \tau h) - u_0'(x)|^2 dx d\tau \\ &\leq \sup_{|s| \leq h} \|u_0'(\cdot + s) - u_0'(\cdot)\|_2^2 \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht gegen Null, da  $u_0'$  auf seinem kompakten Träger gleichmäßig stetig ist. Der infinitesimale Erzeuger ist also  $f(u_0) = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ , er ist mindestens auf dem Teilraum  $C_0^1(\mathbb{R})$  von  $L^2(\mathbb{R})$  erklärt. In der Tat zeigen wir in Abschnitt 4, dass der maximale Definitionsbereich von  $f$  der Sobolewraum  $H^1(\mathbb{R})$  ist. Die Anfangswertaufgabe (1.2) lautet formal

$$(1.4) \quad \dot{u}(t) = f(u(t)), \quad u(0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}).$$

Mit der Schreibweise  $[u(t)](x) = u(x, t)$  geht (1.4) über in die partielle Differentialgleichung

$$(1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung

$$(1.6) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Auf diesen zunächst formalen Zusammenhang mit den partiellen Differentialgleichungen gehen wir in Abschnitt 4 näher ein.

### 1.3 Parameterabhängige und nichtautonome Systeme

**Parameterabhängiges DS:** Oft hängt der Evolutionsoperator noch von Parametern ab.

Sei dazu ein Zustandsraum  $X$  und eine Parametermenge  $\Lambda$  gegeben. Sei

$$\varphi^t : \begin{array}{l} X \times \Lambda \longrightarrow X, \\ (u, \lambda) \longmapsto \varphi^t(u, \lambda), \end{array}$$

so dass  $\varphi^t(\cdot, \lambda)$  für jedes  $\lambda \in \Lambda$  (D0) und (D1) erfüllt. Dieses System kann zu einem dynamischen System auf  $X \times \Lambda =: Y$  erweitert werden durch

$$\Phi^t : \begin{array}{l} Y = X \times \Lambda \longrightarrow X \times \Lambda, \\ (u, \lambda) \longmapsto \Phi^t(u, \lambda) = (\varphi^t(u, \lambda), \lambda), \end{array}$$

das heißt, der Parameter  $\lambda$  wird einfach mitgeführt.

Gehört zu  $\varphi^t(u, \lambda)$  das autonome System  $\dot{u} = f(u, \lambda)$  mit  $\lambda \in \Lambda$  und dem Vektorfeld

$$f(u, \lambda) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi^h(u, \lambda) - u),$$

so gehört zu dem erweiterten Fluss  $\Phi^t(u, \lambda)$  das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Nichtautonomes DS:**  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^{t,s}\})$

Bei nichtautonomen Differentialgleichungssystemen

$$\dot{u} = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0$$

hat  $\varphi^t(u_0) = u(t)$  nicht mehr die gewünschten Eigenschaften. Vielmehr definiert man jetzt

$$(1.7) \quad \varphi^{t,s}(u_0) = u(t), \quad t, s \in \mathbb{T},$$

wobei  $u(t)$  Lösung von

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(s) = u_0$$

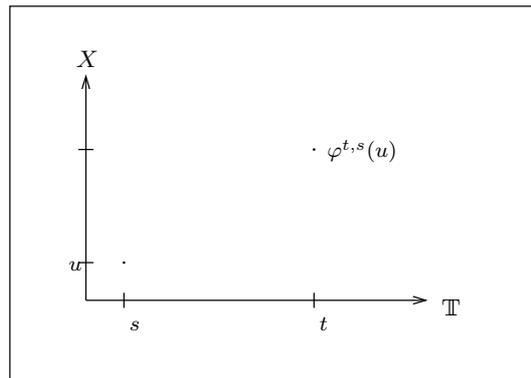
ist. (D0) und (D1) verallgemeinern sich jetzt zu

$$\begin{array}{ll} \text{(D0}_{\text{nonaut}}) & \varphi^{t,t} = \text{id} \quad \forall t \in \mathbb{T}, \\ \text{(D1}_{\text{nonaut}}) & \varphi^{t,s} \circ \varphi^{s,r} = \varphi^{t,r} \quad \forall r, t - s, s - r \in \mathbb{T}. \end{array}$$

In der Tat erfüllt  $\varphi^{t,s}(u_0)$  aus (1.7) die Halbgruppeneigenschaft, wie aus der eindeutigen Lösbarkeit folgt.

Umgekehrt gilt: wenn ein nicht-autonomes DS in  $\mathbb{R}^m$  mit den Eigenschaften  $(\text{D0}_{\text{nonaut}})$  und  $(\text{D1}_{\text{nonaut}})$  gegeben ist in  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ , so heißt

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} (\varphi^{t+h,t}(u_0) - u_0) =: f(t, u_0)$$



infinitesimaler Erzeuger des DS.

### Übungsaufgabe

Man zeige, dass im nichtautonomen Fall  $\varphi^{t,s}(u_0)$  die Anfangswertaufgabe

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(s) = u_0$$

löst.

### Übungsaufgabe

Man überlege sich, dass für ein nicht autonomes DS durch

$$\Phi^t(\tau, u) = (t + \tau, \varphi^{t+\tau, \tau}(u)), \quad \tau \in \mathbb{T}, u \in X$$

ein DS auf dem erweiterten Phasenraum  $Y = \mathbb{T} \times X$  definiert wird.

## 2 Asymptotisches Verhalten dynamischer Systeme

### 2.1 Stetige und glatte dynamische Systeme, periodische Orbits

Um das Konvergenzverhalten für  $t \rightarrow \infty$  studieren zu können, benötigen wir eine Topologie auf  $X$ , die wir gleich als metrisch annehmen.

**Definition 2.1.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  ein DS. Das System heißt **stetig**, falls

$$(D2) \quad \varphi(\cdot) : \begin{array}{ccc} T \times X & \longrightarrow & X, \\ (t, u) & \longmapsto & \varphi^t(u) \end{array} \quad \text{stetig bzgl. } (t, u) \text{ ist,}$$

und **separat stetig**, falls

$$(D2_s) \quad \begin{array}{ccc} \varphi(\cdot) : T & \longrightarrow & X, \\ & t \longmapsto & \varphi^t(u) \end{array} \quad \text{für jedes } u \in X \text{ stetig ist, und} \\ \begin{array}{ccc} \varphi^t(\cdot) : X & \longrightarrow & X, \\ & u \longmapsto & \varphi^t(u) \end{array} \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T} \text{ stetig ist.}$$

Im **diskreten Fall**  $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$  haben wir auf  $\mathbb{T}$  die diskrete Topologie, so dass  $t \rightarrow \varphi^t(u)$  immer stetig ist. Stetigkeit ist dann äquivalent mit separater Stetigkeit.

Im **kontinuierlichen invertierbaren Fall**  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  reicht es für die separate Stetigkeit aus, wenn man die Stetigkeit von  $u \rightarrow \varphi^t(u)$  für jedes  $t \in \mathbb{T}$  hat und lediglich die Stetigkeit von  $t \rightarrow \varphi^t(u)$  für jedes  $u \in X$  bei  $t = 0$  annimmt, denn für festes  $t \in \mathbb{T}$ ,  $u \in X$  gilt

$$\varphi^{t+h}(u) = \varphi^h(\varphi^t(u)) \rightarrow \varphi^t(u), \text{ falls } h \rightarrow 0, h \in \mathbb{T}.$$

Für Halbflüsse  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$  folgt mit diesem Schluss aus der Stetigkeit bei  $t = 0$  i. A. nur die rechtsseitige Stetigkeit bei  $t$ , d.h.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \geq 0}} \varphi^{t+h}(u) = \varphi^t(u).$$

Wenn die Flussabbildungen  $\varphi^t$ ,  $t \geq 0$  jedoch linear sind, so reicht dies für die Stetigkeit des DS aus (siehe Abschnitt 4.2).

**Übungsaufgabe:** Man zeige, dass  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$  und

$$\varphi^t(u) = \begin{cases} u + t + 1, & \text{falls } u < 0 \leq u + t \\ u + t & \text{sonst} \end{cases}$$

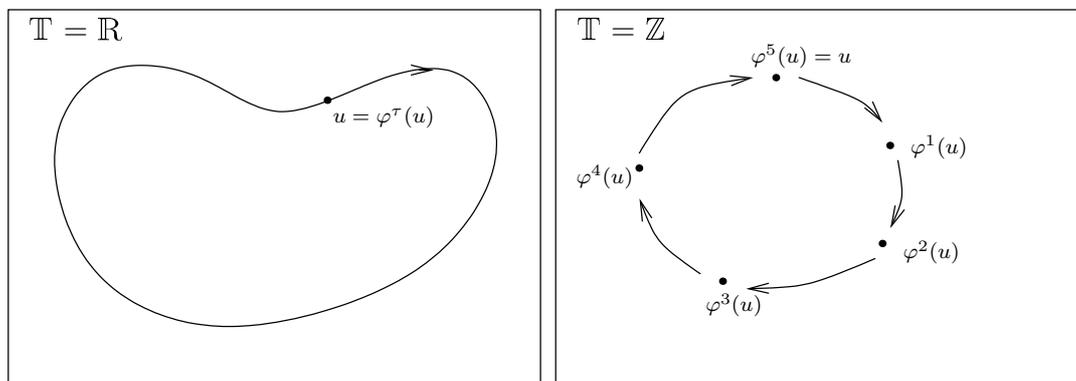
ein dynamisches System definiert, für das  $t \rightarrow \varphi^t(u)$  rechtsseitig stetig aber nicht stetig ist. Ist  $u \rightarrow \varphi^t(u)$  stetig?

Im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$  heißt  $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}}$  ein  **$C^k$ -Fluss**, falls  $X$  offene Teilmenge eines Banachraumes ist und

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times X & \longrightarrow & X, \\ (t, u) & \longrightarrow & \varphi^t(u) \end{array}$$

$k$ -mal stetig differenzierbar ist.

**Definition 2.2.** Ein  $u \in X$  heißt **Fixpunkt** des dynamischen Systems, falls  $\varphi^t(u) = u \forall t \in \mathbb{T}$ . Ein  $u \in X$  heißt **periodisch**, falls ein  $\tau \in \mathbb{T}$  existiert mit  $\varphi^\tau(u) = u$  und  $u$  kein Fixpunkt ist.



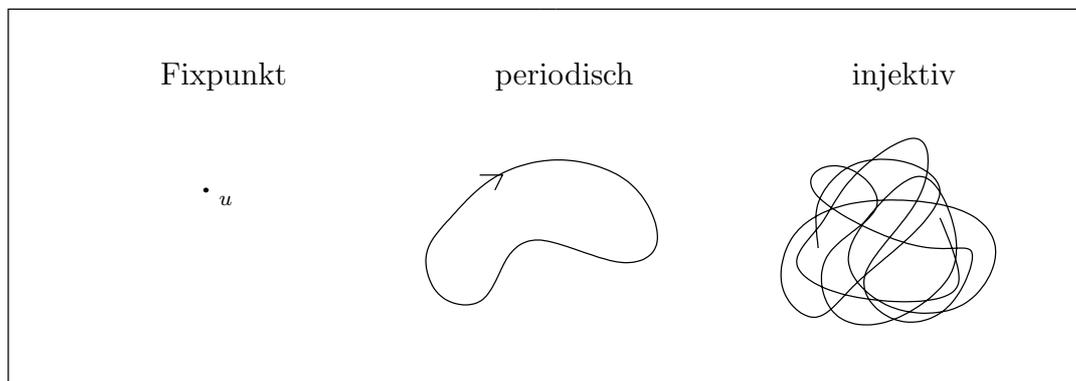
**Definition 2.3.**  $\gamma(u) = \{\varphi^t(u) : t \in \mathbb{T}\}$  heißt **periodischer Orbit**, falls ein  $T \in \mathbb{T}$  existiert mit  $T > 0$ , falls  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ , und  $T > 1$ , falls  $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ , sowie

- (a)  $\varphi^{t+T}(u) = \varphi^t(u) \quad \forall t \in \mathbb{T}$ ,  
 (b)  $\varphi^t(u) \neq u \quad \forall 0 < t < T, t \in \mathbb{T}$ .

Der Wert  $T$  wird als minimale Periode (oder oft einfach als die Periode) des Orbits  $\gamma(u)$  bezeichnet. Es ist klar, dass die Eigenschaft (a) auch mit  $nT$ ,  $n \in \mathbb{N}$  statt  $T$  gilt. Der folgende Satz zeigt, dass es für einen Orbit i.A. nur drei Alternativen gibt.

**Satz 2.4.** Sei  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  separat stetiges und invertierbares dynamisches System,  $\dim X > 1$ . Dann gilt für  $u \in X$  eine der folgenden Alternativen:

- (i)  $u$  ist Fixpunkt,  
 (ii)  $\gamma(u) = \{\varphi^t(u) : t \in \mathbb{T}\}$  ist periodischer Orbit,  
 (iii) die Abbildung  $\mathbb{T} \ni t \mapsto \varphi^t(u) \in X$  ist injektiv.



**Beweis:** Sei  $u$  kein Fixpunkt und  $t \rightarrow \varphi^t(u)$  nicht injektiv. Dann existieren wegen  $\#X > 1$  Zeiten  $s, \tau \in \mathbb{R}$  mit

$$s < \tau, \varphi^s(u) = \varphi^\tau(u).$$

Da das dynamische System invertierbar ist, können wir o. B. d. A.  $s = 0$  annehmen (beachte  $\varphi^{\tau-s}(u) = u$ ). Nun bilden wir

$$T = \inf\{t > 0 : t \in \mathbb{T}, \varphi^t(u) = u\}$$

und zeigen, dass  $T > 0$  gilt und  $\gamma(u)$   $T$ -periodischer Orbit ist. Aus der Definition von  $T$  folgt bereits  $\varphi^t(u) \neq u$  für  $0 < t < T$ .

**Diskreter Fall**  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ : Offensichtlich wird  $T$  als Minimum angenommen, und es gilt  $T > 0, \varphi^T(u) = u$  sowie

$$\varphi^{t+T}(u) = \varphi^t(\varphi^T(u)) = \varphi^t(u) \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

**Kontinuierlicher Fall**  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ : Falls  $T = 0$  gilt, so gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  ein  $t_n \in (0, \frac{1}{n})$  mit  $\varphi^{t_n}(u) = u$ . Für jedes  $s \in \mathbb{R}$  gibt es eine Zerlegung

$$s = m_n t_n + s_n, \quad m_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq s_n < t_n.$$

Hieraus folgt mit der separaten Stetigkeit

$$\varphi^s(u) = \varphi^{s_n}(\varphi^{m_n t_n}(u)) = \varphi^{s_n}(u) \rightarrow \varphi^0(u) = u$$

also  $\varphi^s(u) = u \quad \forall s \in \mathbb{R}$ , ein Widerspruch. Daher ist  $T > 0$ . Nun wählt man eine Folge  $t_n \searrow T$  mit  $\varphi^{t_n}(u) = u$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und erhält  $\varphi^T(u) = u$  aus der separaten Stetigkeit.

Schließlich folgt wie oben  $\varphi^{t+T}(u) = \varphi^t(\varphi^T(u)) = \varphi^t(u) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . ■

**Bemerkung:** Im halbunendlichen Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}_+$  sind (i) und (ii) zu ersetzen durch

- (i')  $\gamma(u)$  ist 'schließlich fix', d. h. es gibt ein  $s \in \mathbb{T}$ , so dass  $\varphi^s(u)$  ein Fixpunkt ist.
- (ii')  $\gamma(u)$  ist 'schließlich periodisch', d. h. es gibt ein  $s \in \mathbb{T}$ , so dass  $\gamma(\varphi^s(u))$  periodischer Orbit ist.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem voranstehenden Beweis, in dem nicht mehr o.B.d.A.  $s = 0$  angenommen werden kann.

Als Beispiel betrachten wir die quadratische Familie ( $1 \leq \lambda \leq 4$ )

$$\varphi(u) = \lambda u(1 - u), \quad u \in [0, 1] = X.$$

Für  $\lambda > 1$  hat  $\varphi$  den nichttrivialen Fixpunkt  $\bar{u} = 1 - \frac{1}{\lambda}$ . Der zu  $u = \frac{1}{\lambda}$  gehörige Orbit ist schließlich fix

$$\varphi^0(u) = u, \quad \varphi^t(u) = \bar{u} \quad \forall t \geq 1.$$

Für  $\lambda > 3$  hat  $\varphi$  den nichttrivialen 2-periodischen Orbit

$$\{u_-, u_+\} \quad \text{mit} \quad u_\pm = \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda + 1}} \right),$$

und der zu  $u_0 = 1 - u_- \neq u_+$  gehörige Orbit ist schließlich periodisch:

$$\varphi(u_0) = \lambda(1 - u_-)u_- = u_+, \quad \varphi^{2t+1}(u_0) = u_+, \quad \varphi^{2(t+1)}(u_0) = u_- \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

## 2.2 Invariante Mengen

**Definition 2.5.** Sei  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  ein dynamisches System. Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt

**positiv invariant**, falls  $\varphi^t(M) \subset M \forall t \in \mathbb{T}, t \geq 0$ ,

**negativ invariant**, falls  $\varphi^t(M) \subset M \forall t \in \mathbb{T}, t \leq 0$ , ( $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ )

**invariant**, falls  $\varphi^t(M) = M$  für alle  $t \in \mathbb{T}$ .

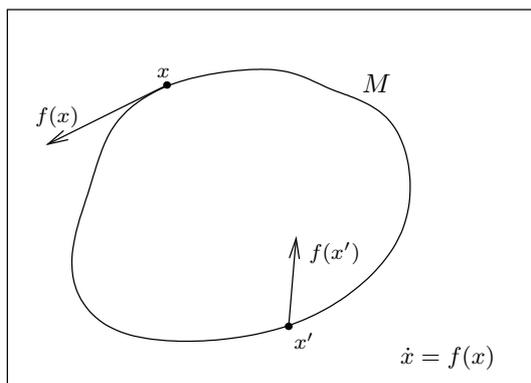
**Bemerkung 2.6.** Folgende Aussagen sind einfach einzusehen.

- 1)  $M$  ist im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$  genau dann invariant, wenn  $M$  sowohl positiv wie negativ invariant ist. Es ist klar, dass positive und negative Invarianz notwendig sind. Umgekehrt sei dies vorausgesetzt. Dann folgt  $\varphi^t(M) = M$  aus  $\varphi^t(M) \subset M, t \in \mathbb{T}$  sowie

$$M = \varphi^t(\underbrace{\varphi^{-t}(M)}_{\subset M}) \subset \varphi^t(M) \forall t \in \mathbb{T}.$$

- 2) Auf einer positiv invarianten Menge  $M$  wird für  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+, \mathbb{N}$  durch Einschränkung  $(M, \mathbb{T}, \{\varphi^t|_M\}_{t \in \mathbb{T}})$  wieder ein DS erzeugt.

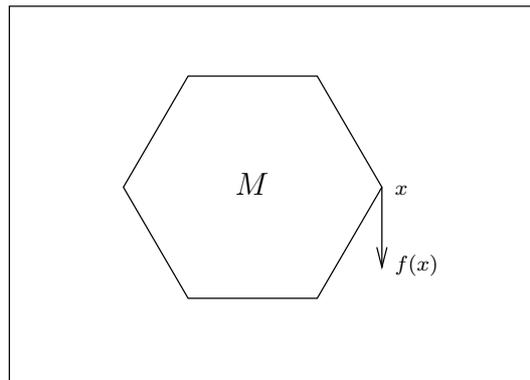
Invariante Mengen sind nicht immer einfach zu finden. Der folgende Satz 2.7 zeigt aber, dass es im kontinuierlichen Fall reicht, das Vektorfeld auf dem Rand zu studieren.



Die Vektoren des Vektorfeldes müssen ins Innere von  $M$  zeigen oder tangential liegen.

**Satz 2.7** (Subtangentialbedingung). Sei  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$  ein DS mit den Voraussetzungen aus Satz 1.6 und mit infinitesimalem Erzeuger  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Eine abgeschlossene Menge  $M \subset \mathbb{R}^m$  ist positiv invariant genau dann, wenn gilt

$$\liminf_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \text{dist}(u + hf(u), M) = 0 \quad \forall u \in \partial M.$$



An nichtglatten Stellen dürfen Richtungsvektoren nicht „echt“ von  $M$  „wegzeigen“.

**Beweis:** (Vgl. [2]). Sei zunächst  $M \subset \mathbb{R}^m$  abgeschlossen und positiv invariant. Für  $u \in M \supset \partial M$  und  $h > 0$  gilt dann

$$M \ni \varphi^h(u) = u + hf(u) + o(h),$$

also

$$\text{dist}(u + hf(u), M) \leq \|u + hf(u) - \varphi^h(u)\| = o(h)$$

und somit

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \text{dist}(u + hf(u), M) = 0.$$

Sei umgekehrt die Subtangentenbedingung erfüllt. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes  $u \in M$  ein  $\epsilon = \epsilon(u) > 0$  gibt mit  $\varphi^t(u) \in M \quad \forall t \in [0, \epsilon]$ . Gibt es nämlich ein  $u \in M$  mit  $\varphi^\tau(u) \notin M$  für ein  $\tau > 0$ , so erhält man an der Stelle  $u_0 = \varphi^t(u) \in M$  mit  $t = \inf\{s > 0 : \varphi^s(u) \notin M\}$  einen Widerspruch zur lokalen Invarianz. Für  $u$  im Innern von  $M$  ist  $\varphi^t(u) \in M$  für hinreichend kleines  $t$  wegen der Stetigkeit von  $\varphi^t$  bzgl.  $t$  klar. Sei also  $u \in \partial M$ . Für  $t \geq 0$  definiere

$$v(t) := \text{dist}(\varphi^t(u), M), \quad D_+v(t) = \liminf_{h \searrow 0} \frac{1}{h} (v(t+h) - v(t)).$$

Wähle ein  $r > 0$  und dann ein  $\epsilon = \epsilon(r) > 0$  mit

$$\varphi^t(u) \in K_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^m : \|v - u\| \leq r\} \quad \forall 0 \leq t \leq \epsilon.$$

Für  $w \notin K_{2r}(u)$ ,  $0 \leq t \leq \epsilon$  gilt dann

$$\|\varphi^t(u) - w\| \geq \|w - u\| - \|\varphi^t(u) - u\| > 2r - r = r.$$

Daher gibt es ein  $w_t \in M \cap K_{2r}(u)$  mit

$$v(t) = \text{dist}(\varphi^t(u), M \cap K_{2r}(u)) = \|\varphi^t(u) - w_t\|.$$

Für festes  $t \in [0, \epsilon)$  und  $s \in (0, \epsilon - t)$  hinreichend klein gilt dann  $s\|f(w_t)\| \leq r$  und somit

$$\|u - (w_t + sf(w_t))\| \leq \|u - w_t\| + \|sf(w_t)\| \leq 2r + r = 3r.$$

Ähnlich wie oben folgt für  $w \notin K_{6r}(u)$  dann

$$\|w - (w_t + sf(w_t))\| \geq \|w - u\| - \|u - (w_t + sf(w_t))\| > 3r.$$

Also existiert ein  $q_{t,s} \in M \cap K_{6r}(u)$  mit

$$\text{dist}(w_t + sf(w_t), M) = \text{dist}(w_t + sf(w_t), M \cap K_{6r}(u)) = \|w_t + sf(w_t) - q_{t,s}\|.$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} v(t+s) &\leq \|\varphi^{t+s}(u) - q_{t,s}\| \leq \|\varphi^s(\varphi^t(u)) - sf(\varphi^t(u)) - \varphi^t(u)\| \\ &\quad + \|\varphi^t(u) - w_t\| + \|w_t + sf(w_t) - q_{t,s}\| + s\|f(\varphi^t(u)) - f(w_t)\| \\ &\leq o(s) + v(t) + \text{dist}(w_t + sf(w_t), M) + s\|f(\varphi^t(u)) - f(w_t)\|. \end{aligned}$$

Division durch  $s$  und  $s \searrow 0$  liefern mit der Subtangentenbedingung und einer Lipschitzkonstanten  $L$  von  $f$  in  $K_{2r}(u)$  die Abschätzung

$$D_+v(t) \leq Lv(t), \quad 0 \leq t < \epsilon, \quad v(0) = 0.$$

Wenn  $v(t)$  stetig differenzierbar ist, folgt hieraus  $v(t) = 0$ ,  $0 \leq t < \epsilon$  nach dem Gronwall-Lemma.

Im allgemeinen Fall betrachten wir für beliebiges  $\lambda > 0$  die Lösung  $w(t, \lambda) = \frac{\lambda}{L}(e^{Lt} - 1)$  der Anfangswertaufgabe

$$\dot{w} = Lw + \lambda, \quad w(0) = 0.$$

Wir behaupten  $v(t) \leq w(t, \lambda)$  für  $0 \leq t < \epsilon$ ,  $\lambda > 0$ , so dass für  $\lambda \searrow 0$  dann  $v(t) \leq w(t, 0) = 0$ ,  $0 \leq t < \epsilon$  und somit  $\varphi^t(u) \in M$  für  $0 \leq t < \epsilon$  folgt.

Wenn die Behauptung nicht gilt, so existiert ein  $\lambda > 0$  und ein  $t_1 \in [0, \epsilon)$  mit  $v(t_1) > w(t_1, \lambda)$ . Da  $v$  und  $w$  stetig in  $t$  sind und bei  $t = 0$  übereinstimmen, existiert damit ein  $t_0 \in [0, t_1)$  mit

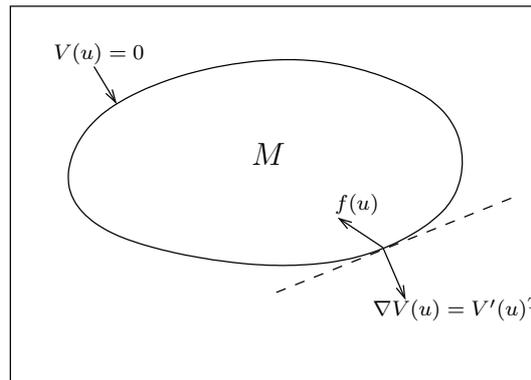
$$v(t) > w(t, \lambda) \quad \forall t_0 < t < t_1 \quad \text{und} \quad v(t_0) = w(t_0, \lambda).$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} D_+v(t_0) - Lv(t_0) &= \liminf_{s \searrow 0} \frac{1}{s} (v(t_0 + s) - v(t_0)) - Lv(t_0) \\ &\geq \liminf_{s \searrow 0} \frac{1}{s} (w(t_0 + s, \lambda) - w(t_0, \lambda)) - Lw(t_0, \lambda) = \dot{w}(t_0, \lambda) - Lw(t_0, \lambda) = \lambda > 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu  $D_+v(t_0) \leq Lv(t_0)$ . ■

**Bemerkung:** Der Beweis zeigt, dass eine genauere Aussage für lokale dynamische Systeme gilt. Sei dazu  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $M \subset \Omega$  abgeschlossen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  lokal Lipschitzbeschränkt. Dann ist die Subtangentenbedingung für  $M$  äquivalent damit, dass die maximale Lösung  $\varphi^t(u_0)$ ,  $t \in J(u_0)$  von  $\dot{u} = f(u)$ ,  $u(0) = u_0$  für alle  $t \in J(u_0) \cap [0, \infty)$  und  $u_0 \in M$  auch  $\varphi^t(u_0) \in M$  erfüllt. Falls  $M$  sogar kompakt ist, kann man in der zweiten Aussage  $[0, \infty) \subset J(u_0)$  für alle  $u_0 \in M$  hinzufügen.



Die Subtangentialbedingung für Niveaumengen.

Ein wichtiger Spezialfall des Satzes liegt vor, wenn  $M$  Niveaumenge einer Funktion  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  ist, d.h.  $M = \{u \in \mathbb{R}^m : V(u) \leq 0\}$ . Wie der folgende Satz zeigt, ist die Subtangentialbedingung in diesem Fall äquivalent zu  $V'(u)f(u) \leq 0$  für alle  $u \in \mathbb{R}^m$  mit  $V(u) = 0$

**Satz 2.8** (Invarianzkriterium für Niveaumengen). Sei  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  gegeben, so dass  $V'(u) \neq 0$  für alle  $u \in \mathbb{R}^m$  mit  $V(u) = 0$  gilt. Dann sind äquivalent

- (i)  $M = \{u \in \mathbb{R}^m : V(u) \leq 0\}$  ist positiv invariant,
- (ii) es gilt  $V'(u)f(u) \leq 0$  für alle  $u \in \mathbb{R}^m$  mit  $V(u) = 0$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Angenommen, es existiert  $u \in \mathbb{R}^m$  mit  $V(u) = 0$  und  $V'(u)f(u) > 0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U \ni u$  mit

$$V'(v)f(v) > 0 \quad \forall v \in U$$

und ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\varphi^t(u) \in U \quad \forall 0 \leq t \leq \varepsilon$ . Es folgt für  $0 \leq t \leq \varepsilon$  mit  $V(u) = 0$

$$V(\varphi^t(u)) = V(\varphi^t(u)) - V(u) = \int_0^t \frac{d}{ds} V(\varphi^s(u)) ds = \int_0^t \underbrace{V'(\varphi^s(u))f(\varphi^s(u))}_{>0} ds > 0$$

im Widerspruch zur positiven Invarianz von  $M$ .

„ $\Leftarrow$ “: Wir weisen die Subtangentialbedingung nach. Sei dazu  $u_0 \in \partial M$  gegeben. Dann folgt  $V(u_0) = 0$  aus der Abgeschlossenheit von  $M$ . Nach Voraussetzung gilt  $V'(u_0) \neq 0$ . Im Fall  $V'(u_0)f(u_0) < 0$  gilt  $V'(u)f(u) < 0$  für  $u$  in einer Umgebung von  $u_0$ , und ähnlich wie im ersten Beweisteil folgt für  $t$  hinreichend klein

$$V(\varphi^t(u_0)) = V(\varphi^t(u_0)) - V(u_0) = \int_0^t V'(\varphi^s(u_0))f(\varphi^s(u_0)) ds < 0,$$

also  $\varphi^t(u_0) \in M$ .

Es bleibt der Fall  $V'(u_0)f(u_0) = 0$  zu betrachten. Wegen  $V'(u_0) \neq 0$  ist  $u_0$  ein sogenannter regulärer Punkt von  $V$  (siehe Analysis II), Wir konstruieren Punkte in  $V^{-1}(0) \subset M$  in der Nähe von  $u_0 + tf(u_0)$  durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen auf die Gleichung

$$g(t, s) := V(u_0 + tf(u_0) + sV'(u_0)^T) = 0.$$

Man beachte dazu  $g(0, 0) = V(u_0) = 0$  und

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0, 0) = V'(u_0)V'(u_0)^T > 0.$$

Daher existieren Nullumgebungen  $T_0, S_0 \subset \mathbb{R}$  und eine Funktion  $h \in C^1(T_0, S_0)$  mit

$$g(t, s) = 0, t \in T_0, s \in S_0 \iff s = h(t), t \in T_0.$$

Insbesondere ist  $h(0) = 0$  und  $g(h(t), t) = 0, t \in T_0$ . Durch Differentiation dieser Gleichung bei  $t = 0$  folgt

$$0 = \frac{\partial g}{\partial t}(0, 0) + \frac{\partial g}{\partial s}(0, 0)h'(0) = V'(u_0)f(u_0) + V'(u_0)V'(u_0)^T h'(0) = \|V'(u_0)^T\|^2 h'(0),$$

also  $h'(0) = 0$ . Damit erhalten wir für  $t > 0$  hinreichend klein

$$\text{dist}(u_0 + tf(u_0), M) \leq \|u_0 + tf(u_0) - [u_0 + tf(u_0) + h(t)V'(u_0)^T]\| = \|h(t)V'(u_0)^T\| = o(t).$$

Division durch  $t$  und  $t \searrow 0$  liefert die Behauptung. ■

**Beispiel 2.9.** Betrachte in  $X = \mathbb{R}^3$  das System von E. N. LORENZ 1962

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \sigma(u_2 - u_1) \\ ru_1 - u_2 - u_1u_3 \\ u_1u_2 - bu_3 \end{pmatrix} = f(u, r, \sigma, b), \quad r, b, \sigma > 0,$$

Eine geeignete Niveaufunktion ist

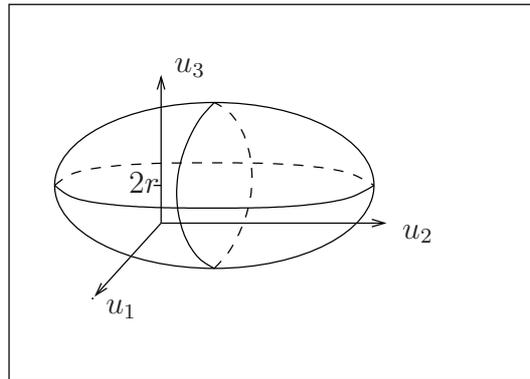
$$V(u) := ru_1^2 + \sigma u_2^2 + \sigma(u_3 - 2r)^2 - c,$$

wobei  $c > 0$  später bestimmt wird. Die Niveaumenge

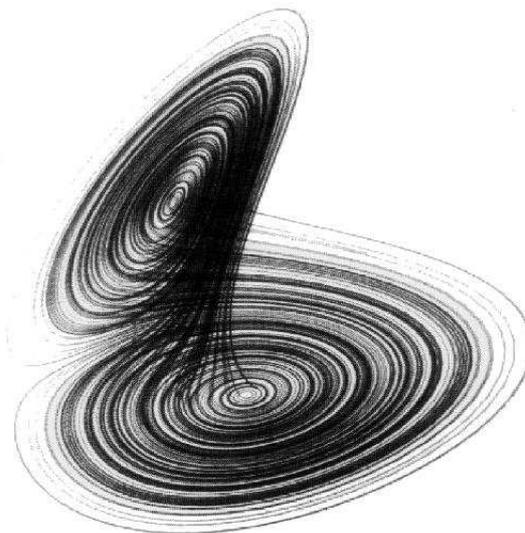
$$M_c := \{v : V(u) \leq 0\}$$

ist dann ein Ellipsoid. Um Satz 2.8 anwenden zu können, berechnen wir

$$\begin{aligned} V'(u)f(u) &= (2ru_1, 2\sigma u_2, 2\sigma(u_3 - 2r)) \begin{pmatrix} \sigma(u_2 - u_1) \\ ru_1 - u_2 - u_1u_3 \\ u_1u_2 - bu_3 \end{pmatrix} \\ &= 2r\sigma u_1(u_2 - u_1) + 2\sigma u_2(ru_1 - u_2 - u_1u_3) + 2\sigma(u_3 - 2r)(u_1u_2 - bu_3) \\ &= -2\sigma(ru_1^2 + u_2^2 + bu_3(u_3 - 2r)). \end{aligned}$$



Ellipsoid



Lorenz-Attraktor

Sei  $V(u)=0$ . Zusammen mit  $-u_3(u_3 - 2r) \leq -\frac{1}{2}(u_3 - 2r)^2 + 2r^2$  folgt dann

$$\begin{aligned}
 V'(u)f(u) &\leq -2\sigma \left( ru_1^2 + u_2^2 + b \left[ \frac{1}{2}(u_3 - 2r)^2 - 2r^2 \right] \right) \\
 &= -2\sigma \left( ru_1^2 + u_2^2 + \frac{b}{2}(u_3 - 2r)^2 \right) + 4r^2b\sigma \\
 &\leq -2\sigma \operatorname{Min} \left( 1, \frac{1}{\sigma}, \frac{b}{2\sigma} \right) \underbrace{(ru_1^2 + \sigma u_2^2 + \sigma(u_3 - 2r)^2)}_{=c} + 4r^2b\sigma \\
 &= -c \operatorname{Min} (2\sigma, 2, b) + 4r^2b\sigma \leq 0,
 \end{aligned}$$

falls  $c \geq c^* := \frac{4r^2b\sigma}{\operatorname{Min}(2\sigma, 2, b)}$ . Also ist der Ellipsoid  $M_c$  für alle  $c \geq c^*$  positiv invariant, und die Lösungen existieren für alle  $t \geq 0$ . Wir bemerken, dass für  $c > c^*$  sogar  $V'(u)f(u) < 0$  für alle  $u \in \partial M_c$  gilt. Im Ellipsoid mit  $c = c^*$  befindet sich der im Bild gezeigte Attraktor des Systems, wie wir später beweisen.

### 2.3 Limesmengen

Was geschieht nun mit den Orbits eines DS für  $t \rightarrow \infty$ ?

**Definition 2.10.** Sei  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  ein DS auf einem metrischen Raum  $X$ . Die  $\omega$ -Limesmenge des Punktes  $u$  ist definiert durch

$$\omega(u) = \{v \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T} \text{ mit } t_n \rightarrow \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(u) = v\}.$$

Entsprechend heißt die Menge

$$\alpha(u) = \{v \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T} \text{ mit } t_n \rightarrow -\infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(u) = v\}$$

$\alpha$ -Limesmenge von  $u$ .

**Satz 2.11.** Sei  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  ein separat stetiges DS und  $u \in X$  gegeben. Sei weiter der **positive Halborbit**  $\gamma^+(u) = \{\varphi^t(u) : t \in \mathbb{T}, t > 0\}$  relativ kompakt (d. h.  $\overline{\gamma^+(u)}$  ist kompakt). Dann gelten:

- (i)  $\omega(u) \neq \emptyset$ ,
- (ii)  $\omega(u)$  ist kompakt,
- (iii)  $\omega(u)$  ist invariant,
- (iv) für den Abstand  $\text{dist}(\varphi^t(u), \omega(u)) = \inf\{d(\varphi^t(u), y) : y \in \omega(u)\}$  gilt

$$(2.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi^t(u), \omega(u)) = 0.$$

Falls das DS kontinuierlich ist, ist  $\omega(u)$  zusammenhängend.

**Beweis:**  $\omega(u)$  ist nicht leer: Wähle  $t_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  und erhalte  $\varphi^{t_n}(u) \in \gamma^+(u) \subset \overline{\gamma^+(u)}$ . Da  $\overline{\gamma^+(u)}$  kompakt ist, existiert ein  $v \in X$  und eine konvergente Teilfolge  $\varphi^{t_{n_k}}(u) \rightarrow v$  mit  $n_k \rightarrow \infty$ . Somit ist  $v \in \omega(u)$  und  $\omega(u) \neq \emptyset$ .

$\omega(u)$  ist abgeschlossen. Gegeben eine Folge  $u_n \in \omega(u)$  mit  $u_n \rightarrow v \in X$ , dann existieren  $t_n > n$  mit  $d(\varphi^{t_n}(u), u_n) \leq \frac{1}{n}$ . Hieraus folgt

$$d(\varphi^{t_n}(u), v) \leq \underbrace{d(\varphi^{t_n}(u), u_n)}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{d(u_n, v)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ also } v \in \omega(u).$$

$\omega(u)$  ist kompakt:  $\omega(u) = \overline{\omega(u)}$  ist als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $\overline{\gamma^+(u)}$  selbst kompakt.

$\omega(u)$  ist invariant: Sei  $v \in \omega(u)$ , dann existiert eine Folge  $t_n \rightarrow \infty$  mit  $\varphi^{t_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ . Für festes  $0 \leq t \in \mathbb{T}$  folgt aus der separaten Stetigkeit

$$\varphi^{t+t_n}(u) = \varphi^t(\underbrace{\varphi^{t_n}(u)}_{\rightarrow v}) \longrightarrow \varphi^t(v).$$

Wegen  $t + t_n \rightarrow \infty$  gilt also  $\varphi^t(v) \in \omega(u)$ . Damit ist  $\varphi^t(\omega(u)) \subset \omega(u)$  gezeigt. Sei jetzt wie oben  $v \in \omega(u)$  gegeben und die Folge  $t_n$  wie oben gewählt. Zu festem  $0 \leq t \in \mathbb{T}$  konstruieren wir jetzt ein  $w \in \omega(u)$  mit  $\varphi^t(w) = v$ , womit dann auch  $\omega(u) \subset \varphi^t(u)$  gezeigt ist. Wegen  $t_n \rightarrow \infty$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $t_n \geq t$  für  $n \geq N$ . Ferner gibt es wie in (i) zu  $\varphi^{t-t_n}(u), n \geq N$  eine konvergente Teilfolge, etwa  $\varphi^{t-t_n}(u) \rightarrow w \in \omega(u)$  für  $n \in N' \subset \mathbb{N}, n \rightarrow \infty$ . Mit der separaten Stetigkeit erhalten wir

$$\varphi^t(w) = \lim_{N' \ni n \rightarrow \infty} \varphi^t(\varphi^{t_n-t}(u)) = \lim_{N' \ni n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(u) = v.$$

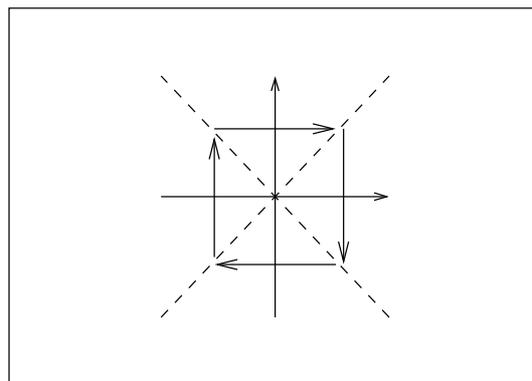
**Beweis von (2.1):** Wenn (2.1) falsch ist, dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  und eine Folge  $t_n \rightarrow \infty$  mit

$$\text{dist}(\varphi^{t_n}(u), \omega(u)) \geq \varepsilon, \quad \text{also} \quad d(\varphi^{t_n}(u), y) \geq \varepsilon \quad \forall y \in \omega(u).$$

Andererseits existiert eine Teilfolge  $t_{n_k} \rightarrow \infty$  mit  $\varphi^{t_{n_k}}(u) \rightarrow v \in \omega(u)$  im Widerspruch zu  $d(\varphi^{t_n}(u), v) \geq \varepsilon$ .

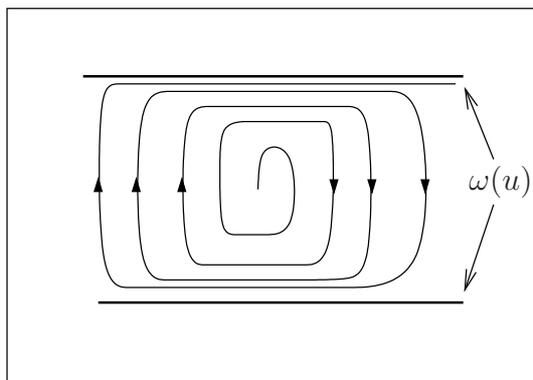
**$\omega(u)$  ist zusammenhängend:** Sei  $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ . Falls  $\omega(u)$  nicht zusammenhängend ist, dann existieren nichtleere abgeschlossene Mengen  $\omega_1, \omega_2$  mit  $\omega(u) = \omega_1 \cup \omega_2, \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ . Sie sind kompakt wegen  $\omega(u) \subset \overline{\gamma^+(u)}$ . Also existieren auch offene Umgebungen  $U_1 \supset \omega_1, U_2 \supset \omega_2$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .  $U_1 \cup U_2$  ist daher eine offene Umgebung von  $\omega(u)$ , und nach (2.1) existiert ein  $T > 0$  mit  $\varphi^t(u) \in U_1 \cup U_2 \quad \forall t \geq T$ ; denn andernfalls gibt es eine Folge  $t_n \rightarrow \infty$ , für die  $\varphi^{t_n}(u)$  gegen ein  $v \in \gamma^+(u) \setminus (U_1 \cup U_2)$  konvergiert im Widerspruch zu  $v \in \omega(u)$ . Somit liegt die Kurve  $\Gamma := \{\varphi^t(u) : t \geq T\}$  in  $U_1 \cup U_2$ . Sie selbst ist nicht zusammenhängend; denn die Mengen  $\Gamma_j = \Gamma \cap U_j, j = 1, 2$  sind in der Relativtopologie von  $\Gamma$  offen, sie erfüllen  $\Gamma = \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2$ , und sie sind beide nichtleer, da sowohl  $\omega_1 \neq \emptyset$  als auch  $\omega_2 \neq \emptyset$ . Andererseits ist  $\Gamma$  als stetiges Bild der zusammenhängenden Menge  $[T, \infty)$  zusammenhängend (allgemeiner Satz aus der Topologie). Dies ist ein Widerspruch. ■

**Bemerkung 2.12.** 1) Für ein diskretes DS ist  $\omega(u)$  i.A. nicht zusammenhängend. Wähle z.B.  $X = \mathbb{R}$  und die Abbildung  $\varphi^t(u) = -u$ , dann ist  $\omega(u) = \{u, -u\}$  nicht zusammenhängend! Es gilt aber im diskreten, invertierbaren Fall, dass  $\omega(u)$



‘invariant zusammenhängend’ ist. Das heißt,  $\omega(u)$  lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer, abgeschlossener und invarianter Mengen schreiben.

2) Falls  $\gamma^+$  nicht relativ kompakt ist, so muss  $\omega(u)$  nicht zusammenhängend sein. Als Beispiel diene folgende Skizze eines zweidimensionalen Flusses:



## 2.4 Asymptotische Stabilität

**Definition 2.13.** Sei  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  ein separat stetiges DS. Eine abgeschlossene Menge  $M \subset X$  heißt

**stabil** (Liapunow stabil), wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $M$  eine Umgebung  $V$  von  $M$  gibt mit

$$(2.2) \quad \varphi^t(V) \subset U \quad \forall t \geq 0, t \in \mathbb{T},$$

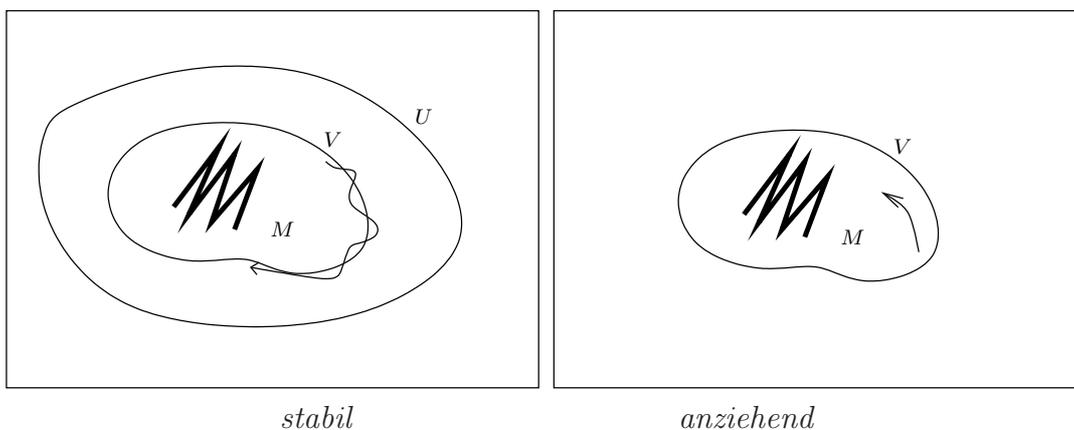
**anziehend**, falls eine Umgebung  $V \supset M$  existiert mit

$$(2.3) \quad \text{dist}(\varphi^t(u), M) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \forall u \in V,$$

**asymptotisch stabil**, falls  $M$  stabil und anziehend ist,

**gleichmäßig anziehend**, falls eine Umgebung  $V \supset M$  existiert mit

$$(2.4) \quad \text{dist}(\varphi^t(V), M) = \sup_{v \in V} \text{dist}(\varphi^t(v), M) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$



stabil

anziehend

**Beispiel 2.14.** (Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)

$\dot{u} = Au$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ ,  $\varphi^t(u) = e^{tA}u$ ,  $M = \{0\}$ ,  $0$  ist Fixpunkt.

Im Folgenden bezeichnen wir das Spektrum von  $A$  mit

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ Eigenwert von } A\}.$$

Ein Eigenwert  $\lambda \in \sigma(A)$  heißt **halbeinfach**, falls

$$\dim \ker(A - \lambda I) = \dim \ker(A - \lambda I)^2.$$

D.h. in der Jordan-Normalform haben alle zu  $\lambda$  gehörigen Kästchen die Dimension 1.

**Satz 2.15.** Für das dynamische System  $\varphi^t(u) = e^{tA}u, t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^m$  gelten die folgenden Äquivalenzen:

(i)  $\{0\}$  ist anziehend  $\Leftrightarrow \{0\}$  ist asymptotisch stabil  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$ .

(ii)  $\{0\}$  ist stabil  $\Leftrightarrow$  für alle  $\lambda \in \sigma(A)$  ist  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  und  $\lambda$  halbeinfach, falls  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ .

**Beweis:** Betrachte die Jordan-Normalform  $A = SJS^{-1}, S \in \mathbb{C}^{m,m}$  invertierbar,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_K \end{pmatrix}, J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k, m_k}, k = 1, \dots, K.$$

Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgt  $e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}$ , wobei

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_K} \end{pmatrix}, e^{tJ_k} = e^{t(\lambda_k I + E_k)}, E_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_k, m_k},$$

$$e^{t(\lambda_k I + E_k)} = e^{t\lambda_k I} \cdot e^{tE_k} = e^{t\lambda_k} \sum_{\nu=0}^{m_k-1} \frac{(tE_k)^\nu}{\nu!} = e^{t\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Bekanntlich gilt

(2.5)  $e^{t\lambda_k} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_k < 0,$

(2.6)  $|e^{t\lambda_k}| \leq C \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_k \leq 0.$

(i)  $\{0\}$  ist anziehend genau dann, wenn  $\varphi^t(v) = e^{tA}v \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \forall v \in \mathbb{R}^m$  gilt. Äquivalent dazu ist  $e^{tJ}v \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \forall v \in \mathbb{C}^m$  und wegen (2.5) auch  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \forall k$ .

- (ii)  $\{0\}$  ist stabil genau dann, wenn es ein  $C \geq 0$  gibt mit  $\|e^{tA}v\| \leq C \forall t \geq 0, v \in \mathbb{R}^m$ . Wegen (2.6) ist dies äquivalent dazu, dass für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  entweder  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  oder ( $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ,  $\lambda$  halbeinfach) gilt.

■

**Satz 2.16** (Liapunow). Sei  $u_0$  Fixpunkt des durch  $\dot{u} = f(u)$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  erzeugten (lokalen) dynamischen Systems  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}})$ . Dann gelten

- (i)  $\{u_0\}$  ist asymptotisch stabil, falls  $\operatorname{Re} \lambda < 0 \forall \lambda \in \sigma(Df(u_0))$ ,  
(ii)  $\{u_0\}$  ist instabil (d.h. nicht stabil), falls ein  $\lambda \in \sigma(Df(u_0))$  existiert mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ .

**Motivation:**  $\dot{u} = f(u)$ ,  $u(0) = v_0 \approx u_0$ ,  $v(t) = u(t) - u_0$ ,  $f(u_0) = 0$ ,

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t) = f(u(t)) - f(u_0) = \underbrace{Df(u_0)}_A \underbrace{(u(t) - u_0)}_{v(t)} + o(\|u(t) - u_0\|) \quad (\text{Taylor})$$

Wir beweisen den Satz 2.16 durch Reduktion auf den zeitdiskreten Fall.

**Lemma 2.17.**  $u_0$  ist (asymptotisch) stabiler Fixpunkt des Flusses  $\varphi^t$ ,  $t \geq 0$  aus Satz 2.16 genau dann, wenn  $u_0$  (asymptotisch) stabiler Fixpunkt des durch  $\varphi = \varphi^1$  erzeugten diskreten DS ist

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Diese Richtung ist offensichtlich.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $u_0$  stabil für  $\{\varphi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Es genügt für beliebiges  $\varepsilon > 0$  und die Umgebung  $U = K_\varepsilon(u_0)$  die Stabilitätsaussage zu zeigen. Da die Abbildung  $(t, u) \mapsto \varphi^t(u)$  stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$\|\varphi^t(u) - \underbrace{\varphi^t(u_0)}_{=u_0}\| \leq \varepsilon, \text{ falls } \|u - u_0\| \leq \delta, 0 \leq t \leq 1,$$

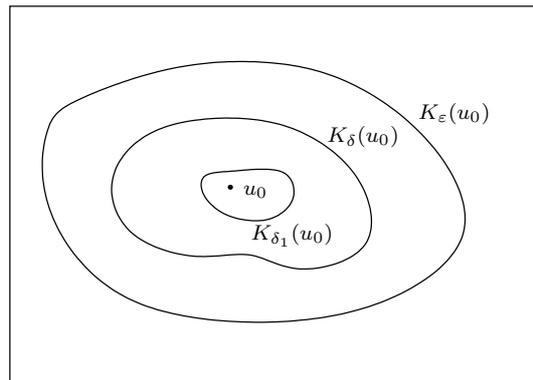
$$(2.7) \quad \varphi^t(K_\delta(u_0)) \subset K_\varepsilon(u_0) \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Da  $u_0$  für  $\{\varphi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  stabil ist, existiert ein  $K_{\delta_1}(u_0)$  mit  $\varphi^n(K_{\delta_1}(u_0)) \subset K_\delta(u_0) \forall n \in \mathbb{N}$ . Mit (2.7) folgt für alle  $0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N}$

$$\varphi^{t+n}(K_{\delta_1}) = \varphi^t(\varphi^n(K_{\delta_1})) \subset \varphi^t(K_\delta(u_0)) \subset K_\varepsilon(u_0).$$

Damit ist  $\varphi^s(K_{\delta_1}) \subset K_\varepsilon$  für alle  $s \geq 0$  gezeigt und somit die Stabilität des Ursprungs für das kontinuierliche dynamische System.

Ist  $u_0$  zusätzlich anziehend für  $\{\varphi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , so existiert eine Umgebung  $V$  von  $u_0$  mit  $\varphi^n(v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_0 \forall v \in V$ . Gegeben  $\varepsilon > 0$ , wähle  $\delta > 0$  mit (2.7) und dann zu  $v \in V$  ein  $N = N(v) \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi^n(v) \in K_\delta(u_0) \forall n \geq N(v)$ . Damit folgt  $\varphi^{t+n}(v) = \varphi^t(\varphi^n(v)) \in K_\varepsilon(u_0) \forall 0 \leq t \leq 1, n \geq N$ , d. h.  $\varphi^s(v) \in K_\varepsilon(u_0) \forall s \geq N(v, \varepsilon)$ . Insgesamt ist daher  $\lim_{s \rightarrow \infty} \|\varphi^s(v) - u_0\| = 0 \forall v \in V$  gezeigt. ■



Wir erinnern an den Spektralradius einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m,m}$

$$r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

**Satz 2.18.** Sei  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  ein Fixpunkt des von  $\varphi^1 = \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  erzeugten DS  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, \{\varphi^n\}_{n \in \mathbb{N}})$ . Dann gelten:

(i)  $r(D\varphi(u_0)) < 1 \Rightarrow u_0$  asymptotisch stabil,

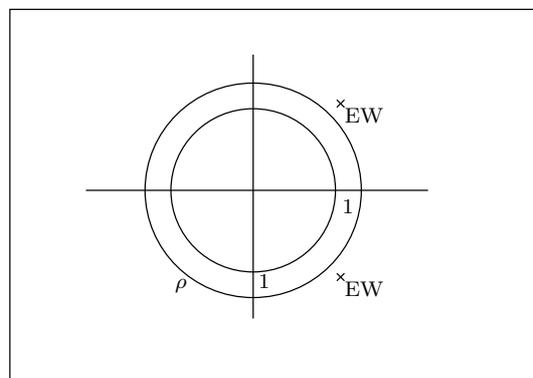
(ii)  $r(D\varphi(u_0)) > 1 \Rightarrow u_0$  instabil.

**Bemerkung:** Aussage (ii) können wir auch formulieren als:  $u_0$  stabil  $\Rightarrow r(D\varphi(u_0)) \leq 1$ . Es gilt also keine vollständige Umkehrung der Aussage (i).

**Beweis:** (i) Siehe Numerik I, (Satz von Ostrowski).

(ii) Aus Numerik I ist  $r(A) = \inf\{\|A\| : \|\cdot\| \text{ Vektornorm im } \mathbb{R}^m\}$  bekannt, wobei  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$  die der Vektornorm zugeordnete Matrixnorm ist.

Wähle  $\rho > 1$  mit  $\rho < \text{Min}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(Df(u_0)), |\lambda| > 1\}$ . O.B.d.A. können wir  $u_0 = 0$



annehmen, andernfalls betrachte sonst  $v \rightarrow \varphi(v + u_0) - u_0$ . Außerdem sei die Matrix

$D\varphi(0)$  wie folgt geblockt

$$D\varphi(0) = \left( \begin{array}{c|c} A_s & 0 \\ \hline 0 & A_u \end{array} \right),$$

mit

$$|\lambda| \leq 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(A_s) \quad , A_s \in \mathbb{R}^{m_s, m_s},$$

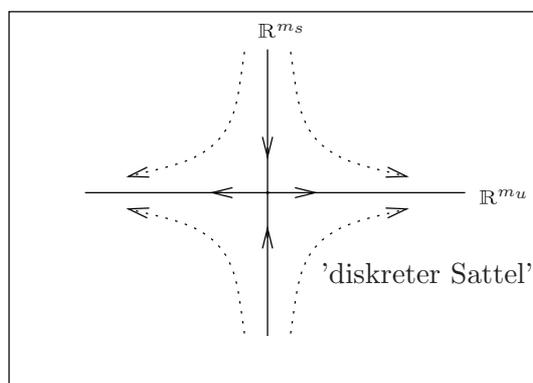
$$|\lambda| > \rho \quad \forall \lambda \in \sigma(A_u) \quad , A_u \in \mathbb{R}^{m_u, m_u}.$$

Diese Form erreicht man durch eine reelle Ähnlichkeitstransformation, vgl. die reelle Jordansche Normalform in Numerik I. Man betrachte dann  $v \rightarrow S^{-1}\varphi(Sv) = \tilde{\varphi}(v)$ , wobei  $S$  die Matrix  $D\varphi(0)$  auf die reelle Jordansche Normalform transformiert.

Es gilt  $r(A_s) \leq 1 < \rho$ ,  $r(A_u^{-1}) < \frac{1}{\rho}$ , und somit existieren Normen

$$\|\cdot\|_s \quad \text{in } \mathbb{R}^{m_s}, \quad \|\cdot\|_u \quad \text{in } \mathbb{R}^{m_u} \quad \text{mit} \quad \|A_s\|_s < \rho, \quad \|A_u^{-1}\|_u < \frac{1}{\rho}.$$

Für  $v = (v_s, v_u) \in \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{m_u}$  setze man die Normen auf  $\mathbb{R}^m$  fort durch  $\|v\| = \max(\|v_s\|_s, \|v_u\|_u)$ .



Dynamik von  $\begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix}$

Betrachte jetzt für festes  $\beta > 0$  den Kegel

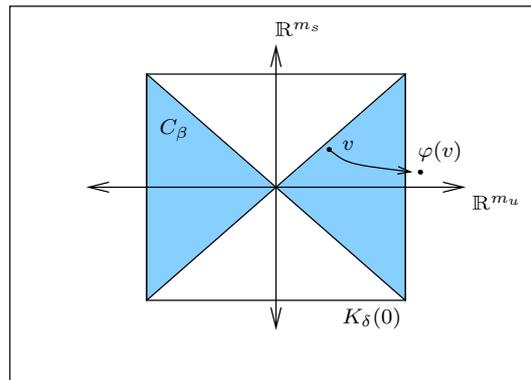
$$C_\beta = \{(v_s, v_u) : \|v_s\|_s \leq \beta \|v_u\|_u\}.$$

Zeige, dass zu  $\beta > 0$  ein  $\delta = \delta(\beta)$  existiert mit

$$(2.8) \quad v = (v_s, v_u) \in C_\beta \cap K_\delta(0) \Rightarrow \|\varphi(v)_u\|_u \geq \rho \|v_u\|_u, \quad \varphi(v) \in C_\beta.$$

Für  $v \in C_\beta$  gilt

$$\|v\| = \max(\|v_s\|_s, \|v_u\|_u) \leq \max(1, \beta) \|v_u\|_u.$$



Wähle  $\varepsilon > 0$  mit

$$\|A_s\|_s + \frac{\varepsilon}{\beta} \max(1, \beta) \leq \rho \leq \frac{1}{\|A_u^{-1}\|_u} - \varepsilon \max(1, \beta).$$

und  $\delta > 0$  mit  $\|\varphi(v) - \varphi(0) - D\varphi(0)v\| \leq \varepsilon\|v\| \forall v \in K_\delta(0)$ . Für  $v \in C_\beta \cap K_\delta(0)$  folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi(v)_u\| &\geq \underbrace{\|(\varphi(0) + D\varphi(0)v)_u\|}_0 - \underbrace{\|(\varphi(v) - \varphi(0) - D\varphi(0)v)_u\|}_{\leq \varepsilon\|v\| \leq \varepsilon \max(1, \beta)\|v_u\|_u} \\ &\geq \|A_u v_u\|_u - \varepsilon \max(1, \beta)\|v_u\|_u \\ &\geq \frac{1}{\|A_u^{-1}\|_u}\|v_u\|_u - \varepsilon \max(1, \beta)\|v_u\|_u \geq \rho\|v_u\|_u \\ \|\varphi(v)_s\| &\leq \|(\varphi(0) + D\varphi(0)v)_s\| + \|(\varphi(v) - \varphi(0) - D\varphi(0)v)_s\| \\ &\leq \|A_s\|_s\|v_s\|_s + \varepsilon\|v\| \\ &\leq (\|A_s\|_s\beta + \varepsilon \max(1, \beta))\|v_u\|_u \\ &\leq \beta\rho\|v_u\|_u \leq \beta\|\varphi(v)_u\|_u. \end{aligned}$$

Damit ist (2.8) gezeigt. Angenommen,  $u_0 = 0$  ist stabil, dann existiert zu  $\delta = \delta(\beta) > 0$  ein  $\hat{\delta} > 0$  mit  $\varphi^n(K_{\hat{\delta}}(0)) \subset K_\delta(0) \forall n \geq 0$ . Für  $v \in C_\beta \cap K_{\hat{\delta}}(0)$  mit  $v_u \neq 0$  folgt aus (2.8) induktiv

$$\|\varphi^n(v)_u\| \geq \rho^n \underbrace{\|v_u\|_u}_{>0} \geq \rho^n \frac{1}{\max(1, \beta)}\|v\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

im Widerspruch zur Stabilität. ■

**Beweis von Satz 2.16:** Im zeitkontinuierlichen Fall  $\dot{u} = f(u)$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  bezeichne  $\varphi^t$  den  $t$ -Fluss. Für einen Fixpunkt  $u_0$  von  $\varphi^t$  folgt  $f(u_0) = 0$ .

Gezeigt ist bereits nach Lemma 2.17 die Äquivalenz der (asymptotischen) Stabilität von  $u_0$  für  $\varphi^t, t \in \mathbb{R}$  mit der für  $\varphi^n, n \in \mathbb{Z}$ .

Wir müssen also  $D_u \varphi^1(u_0)$  bestimmen. Wir benutzen jetzt, dass  $D_u \varphi^t(u_0) = Y(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$  die **Variationsgleichung**

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \dot{Y} &= Df(\varphi^t(u_0))Y, \\ Y(0) &= I. \end{aligned}$$

löst. Man erhält dies aus

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t(u)) = f(\varphi^t(u)), \quad \varphi^0(u) = u$$

durch partielles Differenzieren nach  $u$

$$\frac{d}{dt}Y(t) = Df(\varphi^t(u))Y(t), \quad D_u\varphi^0(u) = I.$$

In dem speziellen Fall eines Fixpunktes  $u_0$ , also  $\varphi^t(u_0) = u_0 \forall t \in \mathbb{R}$ , lautet (2.9)

$$\dot{Y} = Df(u_0)Y, \quad Y(0) = I.$$

mit der Lösung  $Y(t) = e^{tDf(u_0)}$ . Insbesondere gilt  $Y(1) = D_u\varphi^1(u_0) = e^{Df(u_0)}$ . Aus dem Beweis von Satz 2.15 erhält man für  $A \in \mathbb{C}^{m,m}$  die folgende Aussage über die Spektren

$$\sigma(e^A) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} = e^{\sigma(A)}.$$

Insbesondere gilt

$$\sigma(D_u\varphi^1(u_0)) = e^{\sigma(Df(u_0))} = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(Df(u_0))\}.$$

Wegen

$$|e^\lambda| = e^{\operatorname{Re} \lambda} \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} 0,$$

folgt also

$$r(D\varphi^1(u_0)) < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0 \forall \lambda \in \sigma(Df(u_0)).$$

Damit ist der Satz 2.16(i) gezeigt. Schließlich folgt auch die Behauptung (ii) mit Hilfe von Satz 2.18 auf dem folgenden Wege:

$$\begin{array}{ccc} u_0 \text{ stabil für } \varphi^t, t \in \mathbb{R} & \implies & u_0 \text{ stabil für } \varphi^n, n \in \mathbb{Z} \\ & & \Downarrow \\ \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \forall \lambda \in \sigma(Df(u_0)) & \iff & r(D\varphi(u_0)) \leq 1 \end{array}$$

■

## 2.5 Attraktoren

Die Definition eines Attraktors variiert in der Literatur. Wir verwenden folgende (siehe etwa SELL & YOU [23, Kap. 2.3]).

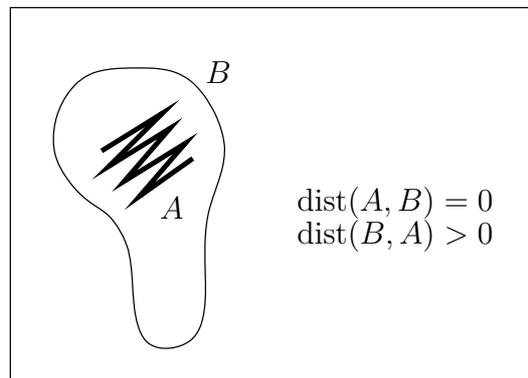
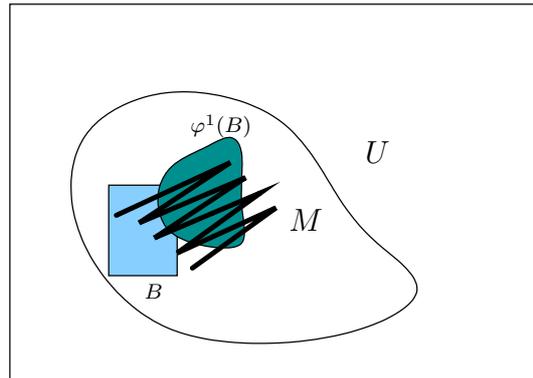
**Definition 2.19** ([23, Kap. 2.3]). Sei  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  ein stetiges DS. Eine Menge  $M \subset X$  heißt **Attraktor**, falls gilt:

- (A1)  $M$  ist kompakt und invariant, d. h.  $\varphi^t(M) = M \forall t \in \mathbb{T}$ ,
- (A2) es existiert eine Umgebung  $U \supset M$ , so dass  $M$  jede beschränkte Menge  $B \subset U$  anzieht, d. h.  $\operatorname{dist}(\varphi^t(B), M) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

Ein Attraktor heißt **unzerlegbar**, falls es einen dichten Halborbit gibt, d.h. ein  $u \in M$  mit

$$\overline{\gamma^+(u)} = \overline{\{\varphi^t(u) : t \geq 0, t \in \mathbb{T}\}} = M.$$

Ein Attraktor heißt **global**, wenn er jede beschränkte Menge  $B \subset X$  anzieht.



$$\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} (x, y) \neq \text{dist}(B, A)$$

**Beispiel 2.20.** Betrachte ein zweidimensionales System  $\dot{u} = f(u)$ ,  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ,  $X = \mathbb{R}^2$ , dessen Phasenportrait im folgenden Bild skizziert wird. Dann gilt:

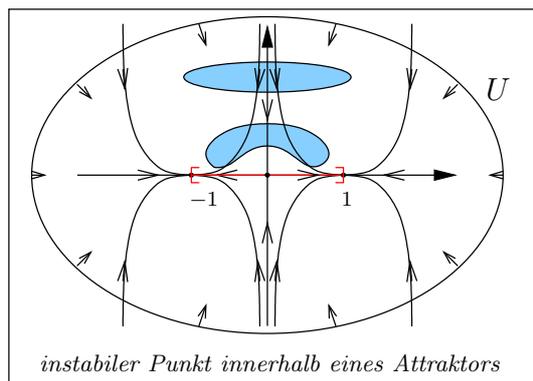
$M = [-1, 1] \times \{0\}$  ist Attraktor, aber nicht unzerlegbar,  
 $M_{\pm 1} = \{(\pm 1, 0)\}$  sind unzerlegbare Attraktoren.

Alternativ läßt sich (A2) wie folgt formulieren:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T(\varepsilon) > 0 : \text{dist}(\varphi^t(u), M) \leq \varepsilon \forall t \geq T(\varepsilon), \forall u \in B.$$

Insbesondere folgt:  $M$  ist anziehend. Es gilt sogar:

**Satz 2.21** ([23, Lemma 23.7]). Ein Attraktor ist asymptotisch stabil.



instabiler Punkt innerhalb eines Attraktors

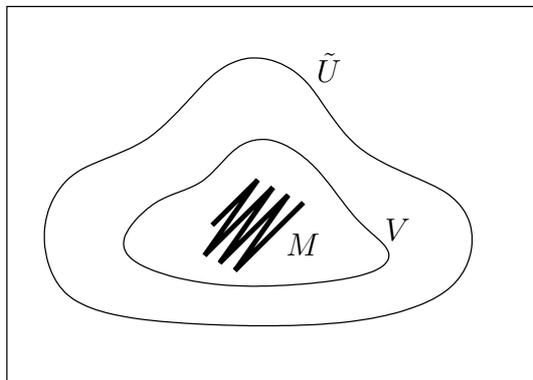
Bild zu Beispiel 2.20.

**Beweis:  $M$  ist anziehend:** Dies ist klar.

$M$  ist **Liapunow stabil** D.h. zu jeder Umgebung  $\tilde{U}$  von  $M$  existiert eine Umgebung  $V$  von  $M$  mit  $\varphi^t(V) \subset \tilde{U} \forall t \geq 0$ . Da  $M$  kompakt ist, genügt es sowohl für  $\tilde{U}$  als auch für  $V$   $\varepsilon$ -Umgebungen von  $M$  zu betrachten, d.h. Mengen der Form

$$N_\varepsilon(M) := \{u \in X : \text{dist}(u, M) \leq \varepsilon\} \text{ für } \varepsilon > 0.$$

Angenommen, die Menge  $M$  ist nicht stabil, d.h. es existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $N_\varepsilon(M) \subset U$



und zu jedem  $\delta_n = \frac{\varepsilon}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  existieren

$$(2.10) \quad u_n \in N_{\delta_n}(M) \text{ und } t_n > 0 \text{ mit } \varphi^{t_n}(u_n) \notin N_\varepsilon(M).$$

Dann gibt es eine Folge  $v_n \in M$  mit  $d(u_n, v_n) \leq 2\delta_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Wegen der Kompaktheit von  $M$  können wir annehmen  $v_n \rightarrow u \in M$ , und damit konvergiert auch  $u_n \rightarrow u \in M$  für  $n \rightarrow \infty$ . Die Menge  $B := \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$  ist wegen  $u_n \rightarrow u$  kompakt, daher existiert nach (A2) ein  $T(\varepsilon)$  mit  $\text{dist}(\varphi^t(B), M) \leq \varepsilon \forall t \geq T(\varepsilon)$ . Es gilt also insbesondere

$$(2.11) \quad \text{dist}(\varphi^t(u_n), M) \leq \varepsilon \quad \forall t \geq T(\varepsilon), n \in \mathbb{N}.$$

Die Abbildung

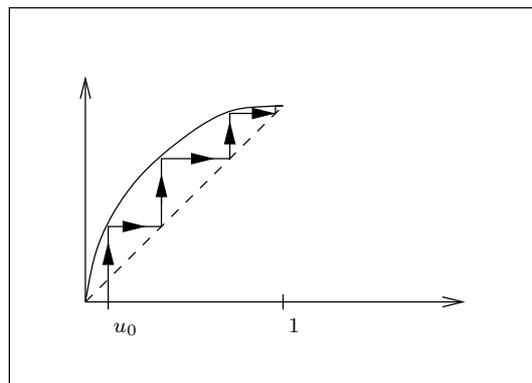
$$\begin{aligned} [0, T] \times B &\longrightarrow X \\ (t, v) &\longmapsto \varphi^t(v) \end{aligned}$$

ist stetig auf einer kompakten Menge und somit gleichmäßig stetig. Also existiert ein  $N(\varepsilon)$  mit

$$(2.12) \quad d(\varphi^t(u_n), \underbrace{\varphi^t(u)}_{\in M}) \leq \varepsilon \quad \forall 0 \leq t \leq T(\varepsilon), n \geq N(\varepsilon).$$

Aus (2.11),(2.12) folgt  $\text{dist}(\varphi^t(u_n), M) \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0, n \geq N(\varepsilon)$  im Widerspruch zu (2.10). ■

**Beispiel 2.22.**  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathcal{S}^1, \varphi(x) = \sqrt{x}, [0] = [1]$  ist anziehender Fixpunkt, aber kein Attraktor. Dasselbe gilt für  $\varphi^{-1}(x) = x^2$ .



Grafische Iteration zu Beispiel 2.22

**Definition 2.23.** Für  $B \subset X$  definieren wir die verallgemeinerte  $\omega$ -Limesmenge durch

$$\omega(B) := \left\{ v \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty, \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B \text{ mit } \varphi^{t_n}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v \right\}.$$

**Warnung!** Im Allgemeinen ist

$$\omega(B) \not\supseteq \bigcup_{u \in B} \omega(u).$$

Dieses veranschaulicht das folgende Beispiel.

**Beispiel 2.24.** In der Situation aus Beispiel 2.20 gilt

$$\omega(B) = [-1, 1] \times \{0\}, \text{ aber } \bigcup_{u \in B} \omega(u) = \{(\pm 1, 0), (0, 0)\}.$$

**Satz 2.25.** Sei  $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{T}})$  ein stetiges dynamisches System und  $U \subset X$  offen mit

- (i)  $\varphi^t(\bar{U}) \subset U \quad \forall t > 0, t \in \mathbb{T},$
- (ii)  $\varphi^t(U), t > 0$  ist relativ kompakt.

Dann ist

$$M := \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(U)$$

ein Attraktor, der  $U$  anzieht und es gilt  $M = \omega(U)$ .

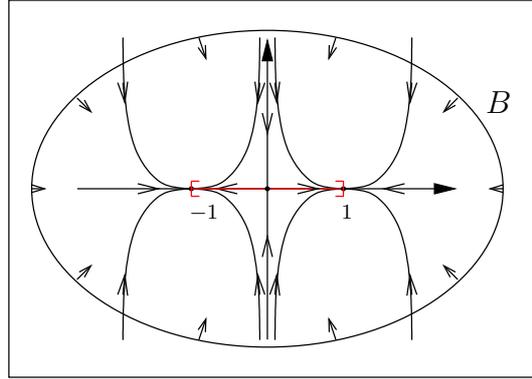


Abbildung 2.1: zu Beispiel 2.24

**Beweis:** Betrachte beliebige Folgen  $t_k \rightarrow \infty$  und  $u_k \in U$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Dann hat  $\varphi^{t_k}(u_k)$  stets eine konvergente Teilfolge. Dies folgt aus (ii), wenn man  $K \in \mathbb{N}$  mit  $t_k > 1$  für alle  $k \geq K$  wählt und dann für  $k \geq K$  schließt

$$\underbrace{\varphi^{t_k}(u_k)}_{\in U} = \varphi^1 \left( \underbrace{\varphi^{t_k-1}(u_k)}_{\in U} \right) \in \varphi^1(U) \quad \text{relativ kompakt.}$$

Wir zeigen die Invarianz von  $\omega(U)$ , d. h.  $\omega(U) = \varphi^t(\omega(U)) \forall t \geq 0$ .

„ $\supset$ “: Zu  $v \in \omega(U)$  existieren Folgen  $t_k \rightarrow \infty$ ,  $u_k \in U$  mit  $\varphi^{t_k}(u_k) \rightarrow v$ . Für  $t \geq 0$  gilt wegen der Stetigkeit

$$\varphi^t \left( \underbrace{\varphi^{t_k}(u_k)}_{\in U} \right) = \varphi^t \left( \underbrace{\varphi^{t_k}(u_k)}_{\rightarrow v} \right) \longrightarrow \varphi^t(v),$$

also  $\varphi^t(v) \in \omega(U)$ . Damit ist  $\varphi^t(\omega(U)) \subset \omega(U)$  gezeigt.

„ $\subset$ “: Sei wie eben  $v \in \omega(U)$ ,  $t_k \rightarrow \infty$ ,  $u_k \in U$  mit  $\varphi^{t_k}(u_k) \rightarrow v$  gewählt und sei  $t \geq 0$  vorgegeben. Wähle dann  $K$  mit  $t_k > t$  für  $k \geq K$  und erhalte  $\varphi^{t_k-t}(u_k) \rightarrow \tilde{u}$  für eine Teilfolge  $k \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$  und ein  $\tilde{u} \in X$ . Nach der Definition von  $\omega(U)$  ist  $\tilde{u} \in \omega(U)$ , und es gilt

$$\varphi^t \left( \underbrace{\varphi^{t_k-t}(u_k)}_{\rightarrow \tilde{u} \in \omega(U)} \right) \rightarrow \varphi^t(\tilde{u}) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Also ist  $v = \varphi^t(\tilde{u}) \in \varphi^t(\omega(U))$ , und die Invarianz gezeigt.

Zeige jetzt die allgemein gültige Darstellung

$$(2.13) \quad \omega(U) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \varphi^t(U)}.$$

Hieraus folgt  $\omega(U)$  ist abgeschlossen. Aus der Invarianz von  $\omega(U) \subset \bar{U}$  zusammen mit den Voraussetzungen (i), (ii) ergibt sich außerdem

$$\omega(U) = \varphi^t(\omega(U)) \subset \varphi^t(\bar{U}) = \varphi^{t-1}(\varphi^1(\bar{U})) \subset \varphi^{t-1}(U) \text{ für } t > 1,$$

so dass  $\omega(U)$  sogar kompakt ist.

„ $\subset$ “: Sei  $v \in \omega(U)$  und wie oben  $t_k \rightarrow \infty$  und  $u_k \in U$  mit  $\varphi^{t_k}(u_k) \rightarrow v$  gewählt. Sei  $s \geq 0$  gegeben. Dann ist  $t_k \geq s$  für  $k \geq K(s)$  und dann auch  $\varphi^{t_k}(u_k) \in \bigcup_{t \geq s} \varphi^t(U)$ .

Hieraus folgt  $v \in \overline{\bigcup_{t \geq s} \varphi^t(U)}$ .

„ $\supset$ “: Sei  $v \in \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \varphi^t(U)}$ , zu jedem  $s = s_k = k$  existieren  $t_k \geq k$  und  $u_k \in U$  mit  $d(v, \varphi^{t_k}(u_k)) \leq \frac{1}{k}$ . Hieraus folgt  $v \in \omega(U)$ .

Wir zeigen, dass  $M := \omega(U)$  jede beschränkte Menge  $B \subset U$  anzieht, d.h. es gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi^t(B), M) = 0$ . Falls nicht, dann existiert ein beschränktes  $B \subset U$ , ein  $\varepsilon > 0$  sowie Folgen  $t_k \rightarrow \infty$  und  $u_k \in B$  mit  $\text{dist}(\varphi^{t_k}(u_k), M) \geq \varepsilon$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Wie oben gilt für eine Teilfolge  $\varphi^{t_k}(u_k) \rightarrow v, k \rightarrow \infty$ , also  $v \in \omega(U)$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $\text{dist}(v, M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi^{t_k}(u_k), M) \geq \varepsilon > 0$ . Damit ist  $\omega(U)$  als Attraktor erkannt.

Schließlich zeigen wir  $\omega(U) = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(U)$ .

Für  $t > 0$  ist  $\omega(U) = \varphi^{2t}(\omega(U)) \subset \varphi^{2t}(\bar{U}) = \varphi^t(\varphi^t(\bar{U})) \subset \varphi^t(U) \subset U$ , so dass  $\omega(U) \subset \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(U)$  gezeigt ist. Sei jetzt  $v \in \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(U)$ , dann gibt es zu jedem  $t_k = k \in \mathbb{N}$  ein  $u_k \in U$  mit  $v = \varphi^{t_k}(u_k)$ , und es folgt  $v \in \omega(U)$ . ■

**Bemerkung 2.26.** Betrachte noch einmal das Lorenz-System aus Beispiel 2.9

$$\begin{aligned} u_1' &= \sigma(u_2 - u_1), \\ u_2' &= ru_1 - u_2 - u_1u_3, \\ u_3' &= -bu_3 + u_1u_2. \end{aligned}$$

Die offenen Ellipsoide

$$M_c = \{(u_1, u_2, u_3) : ru_1^2 + \sigma u_2^2 + \sigma(u_3 - 2r)^2 < c\}$$

erfüllen  $\varphi^t(\overline{M_c}) \subset M_c$  für  $c > c^*$ . Also ist der Satz anwendbar!

Das System besitzt also den maximalen Attraktor  $M = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(M_c)$ . Mit Hilfe der Funktion  $V(u)$  aus Beispiel 2.9 kann man zeigen, dass dieser Attraktor global und von  $c > c^*$  unabhängig ist (Übungsaufgabe).

### 3 Numerische Fragestellungen

#### 3.1 Asymptotisches Verhalten von Einschrittverfahren

Sei  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t \geq 0})$  ein dynamisches System, erzeugt von  $\dot{u} = f(u)$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , und es sei  $u(0) = u_0$ .

Ein Einschrittverfahren hat die Form

$$u_{n+1} = \Phi_{\Delta t}(u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mit vom Parameter  $\Delta t > 0$  abhängigen Abbildungen  $\Phi_{\Delta t} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ . Somit wird ein diskretes DS

$$(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, \{\Phi_{\Delta t}^n\}_{n \in \mathbb{N}}) \quad (\Phi_{\Delta t}^n \sim \varphi^{n\Delta t})$$

erzeugt. Zum Beispiel  $\Phi_{\Delta t}$  aus einem Runge-Kutta-Verfahren

$$\Phi_{\Delta t}(u) = u + \Delta t \sum_{i=1}^s \gamma_i k_i(u, \Delta t)$$

wobei  $k_i = k_i(u, \Delta t)$ ,  $i = 1, \dots, s$  ( $s = \text{Stufe}$ ) das folgende  $ms$ -dimensionale System lösen

$$k_i = f(u + \Delta t \sum_{j=1}^s \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, s.$$

**Frage 1:** Wann und für welche  $u \in \mathbb{R}^m$  kann man **globale Konvergenz** gemäß

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi^{n\Delta t}(u) - \Phi_{\Delta t}^n(u)| = \mathcal{O}(\Delta t^p)$$

garantieren?

**Erinnerung:** Aus Numerik II kennen wir Abschätzungen der Form

$$\sup_{0 \leq n\Delta t \leq T} |\varphi^{n\Delta t}(u) - \Phi_{\Delta t}^n(u)| \leq C e^{LT} (\Delta t)^p,$$

dabei ist  $L$  eine Lipschitz-Konstante von  $f$ . Offensichtlich ist eine derartige Abschätzung wegen des Faktors  $e^{LT}$  nicht geeignet, um die Frage nach der globalen Konvergenz zu beantworten. Eine positive Antwort auf Frage 1 gibt es im Wesentlichen nur, falls  $\varphi^t(u) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} v$ ,  $f(v) = 0$ ,  $v$  ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht. Diesen Fall werden wir in Kapitel II, § 2.2 untersuchen.

Dass man globale Konvergenz im Allgemeinen nicht erwarten kann, soll das folgende Beispiel motivieren.

**Beispiel 3.1.**  $\varphi^t(u)$  periodisch, also  $\varphi^{t+T}(u) = \varphi^t(u) \forall t$ .

Die numerische Lösung ist dann im Allgemeinen 'phasenverschoben'. Die Phasenverschiebung summiert sich in jeder Periode auf, so dass man keine Konvergenz auf der ganzen Zeitachse erwarten kann, siehe Abbildung 3.1.

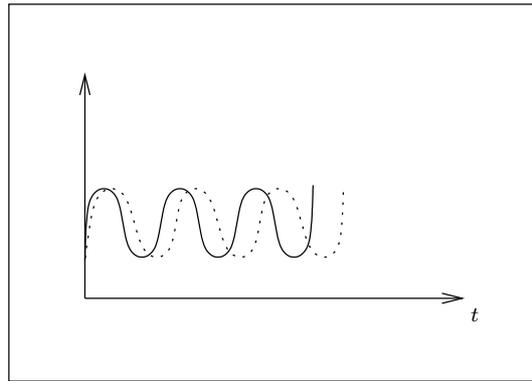


Abbildung 3.1: Phasenverschiebung einer numerischen Lösung

**Frage 2:** Kann man zu jedem  $u \in U$  ein  $\tilde{u} = \tilde{u}(\Delta t, u)$  konstruieren mit

$$(3.1) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi^{n\Delta t}(u) - \Phi_{\Delta t}^n(\tilde{u})\| \begin{cases} \rightarrow 0 \\ = \mathcal{O}(\Delta t^p) \end{cases}$$

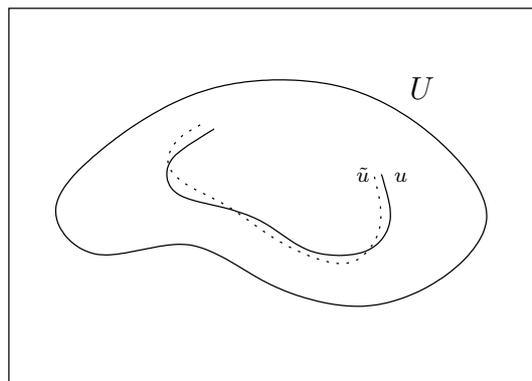


Abbildung 3.2: Schattierung eines Orbits

und umgekehrt (zu jedem  $\tilde{u} \in U \exists u = u(\Delta t, \tilde{u})$  mit (3.1))?

Wenn dies möglich ist, spricht man davon, dass ein 'shadowing' Prinzip gilt. Ein solches Resultat gilt z. B. in der Umgebung eines Sattels, dieses werden wir in Kapitel II, § 2.3 untersuchen.

Wir erinnern noch einmal an die Abstandsbegriffe für Mengen  $A, B \subset X$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$ .

$$\text{dist}(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y),$$

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B) \quad (\text{unsymmetrischer Hausdorff-Abstand}),$$

$$\text{dist}_H(A, B) := \max(\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)) \quad (\text{Hausdorff-Abstand}).$$

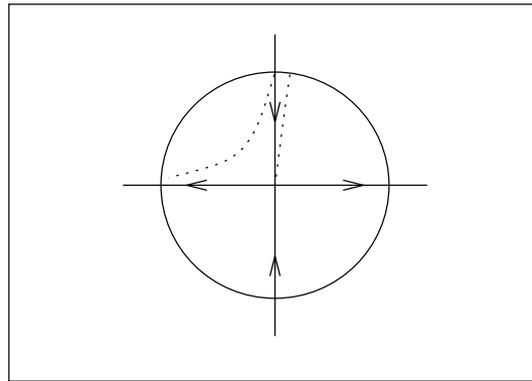


Abbildung 3.3: Dynamik einer numerischen Approximation in der Nähe eines Sattels

**Frage 3:** Ist es möglich, die  $\omega$ -Limesmengen zu vergleichen?

$$\begin{aligned}\omega(u) &= \{v \in \mathbb{R}^m : \exists t_k \rightarrow \infty, \varphi^{t_k}(u) \rightarrow v\} \\ \omega_{\Delta t}(u) &= \{v \in \mathbb{R}^m : \exists n_k \in \mathbb{N}, n_k \rightarrow \infty, \Phi_{\Delta t}^{n_k}(u) \rightarrow v\} \\ \text{dist}_H(\omega_{\Delta t}(u), \omega(u)) &\Big| \begin{array}{l} \longrightarrow 0 \\ = \mathcal{O}(\Delta t^p) \end{array} ?\end{aligned}$$

**Frage 4:** Kann unter den Voraussetzungen des Satzes 2.25 die Existenz und Konvergenz von Attraktoren gezeigt werden?

Sei also  $\varphi^t(\bar{U}) \subset U$ ,  $\varphi^t(U)$  kompakt, existiert dann ein numerischer Attraktor  $M_{\Delta t} = \bigcap_{n \geq 0} \Phi_{\Delta t}^n(U)$  und gilt

$$\text{dist}_H(M_{\Delta t}, M) \Big| \begin{array}{l} \longrightarrow 0 \\ = \mathcal{O}(\Delta t^p) \end{array} ?$$

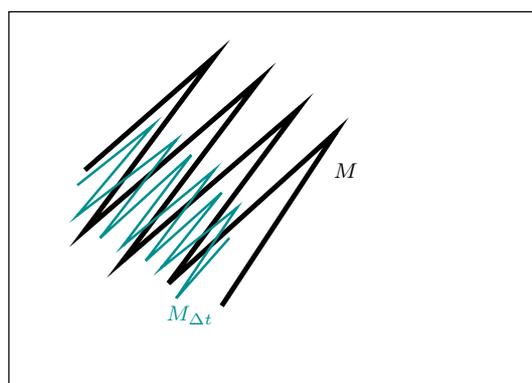


Abbildung 3.4: 'Oberhalb-Stetigkeit' von Attraktoren

Im Allgemeinen gilt hier nur 'Oberhalb-Stetigkeit der Attraktoren' (siehe Kapitel II, § 3), d. h.

$$\text{dist}(M_{\Delta t}, M) \rightarrow 0 \text{ für } \Delta t \rightarrow 0.$$

### 3.2 Numerische Berechnung von invarianten Mengen

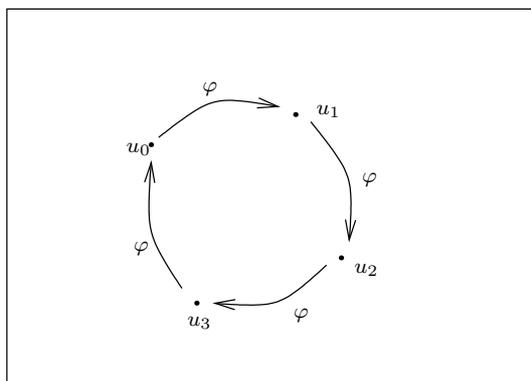
#### Diskreter Fall

Sei  $(X, \mathbb{N}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{N}})$  ein dynamisches System und  $\varphi = \varphi^1$ . Eine Menge  $M \subset X$  heißt invariant, falls gilt:  $\varphi^t(M) = M \forall t > 0$ . (im diskreten Fall:  $\varphi(M) = M$ ). Wir haben drei Kategorien von invarianten Mengen (siehe Satz 2.4):

- (i) **Fixpunkte:**  $u_0 \in X$  mit  $\varphi(u_0) = u_0$ . Das so entstandene Gleichungssystem lässt sich z.B. mit dem Newton-Verfahren lösen. In diesem Fall ist  $M = \{u_0\}$ .
- (ii) **periodische Orbits:** bestimme  $N \in \mathbb{N}$  und  $u_0, \dots, u_{N-1} \in X$  mit

$$\varphi(u_{i \bmod N}) = u_{(i+1) \bmod N}.$$

1. Möglichkeit: löse  $u_0 = \varphi^N(u_0)$



2. Möglichkeit: Löse das folgende Gleichungssystem nach  $(u_0, \dots, u_{N-1}) = v \in X^N$  auf

$$0 = F(v) = \begin{pmatrix} u_1 - \varphi(u_0) \\ u_2 - \varphi(u_1) \\ \vdots \\ u_0 - \varphi(u_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

- (iii) **Aperiodisches Verhalten:** Für Attraktoren (in Phasenräumen  $X$  nicht zu hoher Dimension) sind Methoden entwickelt worden, um sie durch sich verfeinernde Überdeckungen mit Boxen zu approximieren. Spezielle Methoden gibt es für invariante Mengen  $M$ , die Untermannigfaltigkeiten eines  $\mathbb{R}^k$  sind.

$$M = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

Von besonderem Interesse sind invariante Mannigfaltigkeiten, die aus sog. stabilen bzw. instabilen Mengen von Fixpunkten oder periodischen Orbits entstehen.

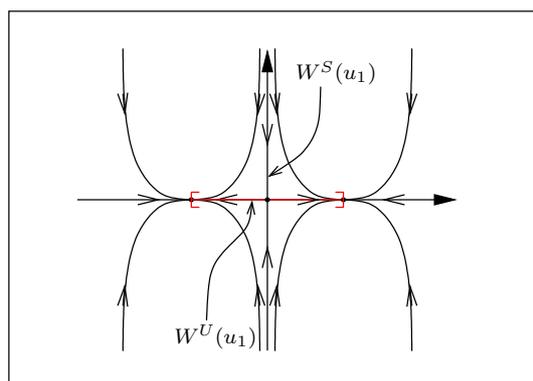


Abbildung 3.5: Stabile und instabile Mengen

Allgemein nennt man für  $u_0 \in X$

$$W^S(u_0) := \{v \in X : d(\varphi^t(v), \varphi^t(u_0)) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty\}$$

die stabile Menge,

$$W^U(u_0) := \{v \in X : d(\varphi^t(v), \varphi^t(u_0)) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow -\infty\}$$

die instabile Menge

von  $u_0$ .

Unter gewissen Voraussetzungen kann man zeigen, dass die stabilen/instabilen Mengen eines Fixpunktes bzw. eines periodischen Punktes  $u_0$  in der Tat glatte Mannigfaltigkeiten sind.

**Kennzahlen:** Dimension der invarianten Mannigfaltigkeiten  $\dim(M)$ , oder Liapunow Exponenten. Falls für ein  $u \in \mathbb{R}^m$  der Grenzwert

$$(3.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\underbrace{D\varphi^t(u)}_{\in \mathbb{R}^{m,m}}\| =: \lambda_1(u),$$

existiert, so heißt  $\lambda_1(u)$  der erste **Liapunow Exponent** bez.  $u$ . Im Spezialfall  $\varphi^t(u) = A^t u$  mit  $A \in \mathbb{R}^{m,m}$  gilt

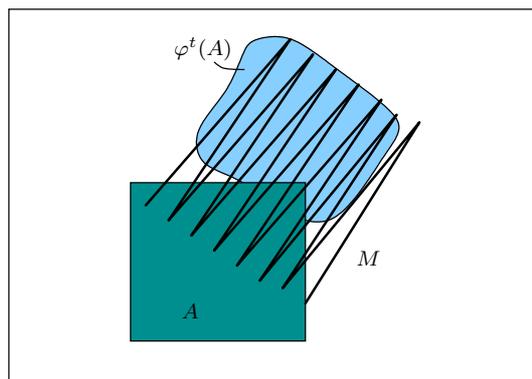
$$(3.3) \quad \frac{1}{t} \ln \|A^t\| = \ln \|A^t\|^{\frac{1}{t}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \ln r(A),$$

nach der bekannten *Gelfand Formel* für den Spektralradius von Matrizen:

$$(3.4) \quad r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

**Invariante Maße:** Ein Maß  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  mit einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  in  $X$  heißt invariant bezüglich des dynamischen Systems, falls

$$\mu(\varphi^t(A)) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{F} \subset P(X) \quad \forall t > 0.$$



### Kontinuierlicher Fall

Sei  $(X, \mathbb{R}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}})$  ein kontinuierliches Dynamisches System.

- (i) **Fixpunkte:** Es gilt  $\varphi^t(u_0) = u_0 \forall t$ , oder äquivalent  $f(u_0) = 0$ , falls  $f$  infinitesimaler Erzeuger ist.
- (ii) **periodische Orbits:** Für die Differentialgleichung  $\dot{u} = f(u)$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , suchen wir  $T > 0$  und eine Lösung  $u(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  mit  $u(0) = u(T)$ ,  $\gamma(u(0)) = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  heißt dann periodischer Orbit. Man kann einen periodischen Orbit berechnen, indem man folgendes Randwertproblem löst:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= f(u), \\ u(0) &= u(T). \end{aligned}$$

Bei dieser Randwertaufgabe muss die Unbekannte  $T$  mitbestimmt werden. Man kann die Gleichung auf ein Einheitsintervall transformieren und dabei die Unbekannte  $T$  aus den Randbedingungen direkt in die Differentialgleichung bringen. Setze dazu  $v(t) = u(tT)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Dann ist (3.5) äquivalent zu der Aufgabe

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \dot{v} &= T\dot{u}(tT) = Tf(u(tT)) = Tf(v(t)), \\ v(0) &= v(1). \end{aligned}$$

Anstelle des unbekanntem Parameters  $T$  kann man auch die Differentialgleichung  $\dot{T} = 0$  schreiben. Hieraus erkennt man, dass (3.6) ein System von  $m + 1$  Differentialgleichungen für  $v_1(t), \dots, v_m(t), T(t)$  darstellt mit nur  $m$  Randbedingungen  $v_i(0) = v_i(1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Dies ist noch keine korrekt gestellte Randwertaufgabe. Dies spiegelt sich auch darin wieder, dass mit jeder 1-periodischen Lösung  $v(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  auch  $v(t + s)$  für jedes  $s \in \mathbb{R}$  eine 1-periodische Lösung von (3.6) ist. Man hat also ein Kontinuum von Lösungen, und es genügt durch eine Zusatzbedingung eine davon auszuwählen.

Zum Beispiel kann man eine Hyperebene

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m : \alpha^T x = \beta\} \text{ für geeignete } \alpha \in \mathbb{R}^m, \beta \in \mathbb{R}$$

wählen und  $u(0) = v(0) \in H$  verlangen. Diese  $(m+1)$ te Randbedingung  $\alpha^T v(0) - \beta = 0$  heißt auch eine **Phasenbedingung**, da sie die Phasenverschiebung der periodischen Lösung festlegt.

Suche also  $(v, T)(t) \in \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , mit

$$(3.7) \quad \begin{array}{l} m+1 \\ \text{Gleichungen} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = Tf(v), \\ \dot{T} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v(0) = v(1) \\ \alpha^T v(0) - \beta = 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} m+1 \\ \text{Gleichungen} \end{array}} \right\} m \text{ Gleichungen} .$$

- (iii) **Aperiodisches Verhalten:** Wir erwarten Attraktoren, invariante Mannigfaltigkeiten wie im diskreten Fall. Von besonderem Interesse sind z. B. invariante Tori, die durch Destabilisierung periodischer Orbits entstehen können und zu  $S^1 \times S^1$  diffeomorph sind.

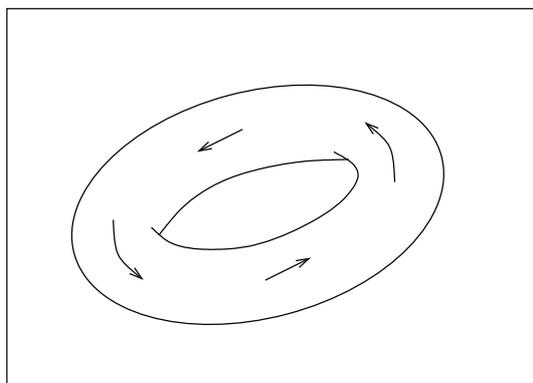


Abbildung 3.6: Invarianter Torus

**Kennzahlen:** Wie im diskreten Fall treten Dimensionszahlen und Liapunow Exponenten auf.

Wir diskutieren genauer **invariante Maße** im kontinuierlichen Fall  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}})$  und den Zusammenhang mit dem infinitesimalen Erzeuger  $f$ . Betrachte ein Maß mit Lebesgue Dichte  $\varrho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} \varrho(u) du.$$

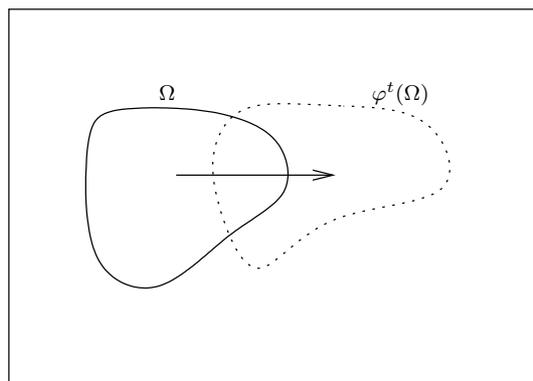
Dann folgt für offene beschränkte Mengen  $\Omega$  aus dem Transformationsatz

$$\mu(\varphi^t(\Omega)) = \int_{\varphi^t(\Omega)} \varrho(u) du = \int_{\Omega} \varrho(\varphi^t(u)) |\det D_u \varphi^t(u)| du.$$

Die Funktion  $Y(t) = D_u \varphi^t(u)$  ist Lösung der Variationsgleichung (siehe (2.9)):

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= A(t)Y(t), & \text{mit } A(t) &= Df(\varphi^t(u)) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\varphi^t(u)) \right)_{i,j=1}^m, \\ Y(0) &= I. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Determinante benutzen wir den folgenden Satz.

Abbildung 3.7: Zeitliche Entwicklung einer Menge  $\Omega$  unter dem Fluss  $\varphi^t$ 

**Satz 3.2.** (LIOUVILLE)  $d(t) = \det Y(t)$  löst  $\dot{d}(t) = (\text{Spur } A(t))d(t)$ ,  $d(0) = 1$ .

**Beweis:** Wir schreiben  $Y(t)$  in Zeilenform

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}, \quad d(t) = \det(Y(t)),$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{d}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \det \begin{pmatrix} y_1(t+h) \\ \vdots \\ y_m(t+h) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \det \begin{pmatrix} y_1(t+h) \\ \vdots \\ y_m(t+h) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t+h) \\ \vdots \\ y_m(t+h) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \det \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t+h) \\ \vdots \\ y_m(t+h) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t+h) \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Mit den Determinantenregeln und der Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned}
\dot{d}(t) &= \sum_{i=1}^m \det \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_i(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \det \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m A_{ij} y_j(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^m \det \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ A_{ii} y_i(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^m A_{ii}(t) \right)}_{\text{Spur } A(t)} d(t).
\end{aligned}$$

■

Mit

$$d(t) = \exp \left( \int_0^t \text{Spur}(A(s)) ds \right) > 0,$$

führen wir die obige Rechnung fort und erhalten durch Rücktransformation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mu(\varphi^t(\Omega)) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\varrho(\varphi^t(u)) d(t)) du \\
&= \int_{\Omega} D\varrho(\varphi^t(u)) \underbrace{\frac{d}{dt} \varphi^t(u)}_{f(\varphi^t(u))} d(t) + \varrho(\varphi^t(u)) \underbrace{\frac{\dot{d}(t)}{\text{Spur}(A(t))d(t)}}_{\text{Spur}(A(t))d(t)} du \\
&= \int_{\Omega} [D\varrho(\varphi^t(u)) f(\varphi^t(u)) + \varrho(\varphi^t(u)) \text{div} f(\varphi^t(u))] \cdot \det(D_u \varphi^t(u)) du \\
&= \int_{\varphi^t(\Omega)} D\varrho(v) f(v) + \varrho(v) \text{div} f(v) dv = \int_{\varphi^t(\Omega)} \text{div}(\varrho f)(v) dv.
\end{aligned}$$

Für die letzte Zeile beachte die Identität

$$\text{div}(\varrho f) = \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (\varrho f_i) = \sum_i \frac{\partial \varrho}{\partial v_i} f_i + \varrho \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial v_i}.$$

Unter obigen Voraussetzungen haben wir also den folgenden Satz bewiesen.

**Satz 3.3** (Transporttheorem von Reynolds). *Unter Glattheitsvoraussetzungen an  $\varrho, \Omega, f$  gilt*

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt} \int_{\varphi^t(\Omega)} \varrho(u) du = \int_{\varphi^t(\Omega)} \text{div}(\varrho f)(u) du.$$

**Beispiele.** 1.)  $\mu$  invariant  $\Leftrightarrow \text{div}(\varrho f) = 0$ . Wenn  $\varrho$  die physikalische Dichte einer strömenden Flüssigkeit bezeichnet, so sollte die Gesamtmasse  $\mu(\varphi^t(\Omega))$  für jedes  $\Omega$  von  $t$  unabhängig und konstant sein. Man bezeichnet dann  $\text{div}(\varrho f) = 0$  auch als **Kontinuitätsgleichung** (vgl. Abschnitt 4.4).

2.) Anwendung auf das Lorenz-System 2.9: Setze

$$\Omega := M_c = \{(u_1, u_2, u_3) : ru_1^2 + \sigma u_2^2 + \sigma(u_3 - 2r)^2 \leq c\},$$

$$\varphi^t(\overline{\Omega}) \subset \Omega, \varrho \equiv 1, \operatorname{div} f = -\sigma - 1 - b < 0, b, \sigma > 0,$$

$$\lambda(t) := \mu(\varphi^t(\Omega)) = \int_{\varphi^t(\Omega)} du,$$

wobei  $\mu$  das Lebesguemaß bezeichne. Mit Hilfe des Transporttheorems 3.3 folgt

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = - \int_{\varphi^t(\Omega)} (\sigma + 1 + b) du = -(\sigma + 1 + b)\lambda(t)$$

und damit

$$\lambda(t) = e^{-(\sigma+1+b)t}\lambda(0) \rightarrow 0, \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Für den Attraktor  $M$  gilt wegen Satz 2.25

$$M \subset \varphi^t(\Omega), \quad \forall t > 0,$$

und damit

$$\mu(M) \leq \lambda(t) = e^{-(\sigma+1+b)t}\mu(\Omega), \quad \text{also } \mu(M) = 0.$$

Damit ist der Attraktor  $M$  eine Lebesgue-Nullmenge im  $\mathbb{R}^3$ .

## 4 Partielle Differentialgleichungen als dynamische Systeme

Wir zeigen in diesem Paragraphen exemplarisch, dass sich 'zeitabhängige' partielle Differentialgleichungen als dynamische Systeme in einem Banachraum schreiben lassen.

### 4.1 Einige Funktionenräume

Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ist

$$\mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R}) = \{u \in \mathbb{R}^\Omega : u \text{ stetig und beschränkt}\}$$

zusammen mit der Supremumsnorm  $\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| : x \in \Omega\}$  ein Banachraum. Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen gilt dies auch für

$$\mathcal{C}_b^k(\Omega, \mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}) : D^\alpha u \in \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R}) \forall |\alpha| \leq k\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{k,\infty} = \sup\{|D^\alpha u(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq k\}.$$

Vielfach sind Räume  $p$ -fach integrierbarer Funktionen wichtig. Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  Lebesgue-messbar ist

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{u \in \mathbb{R}^\Omega : u \text{ Lebesgue-messbar, } |u|^p \text{ integrierbar}\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

ein Banachraum bez. der Norm

$$\|u\|_p = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Für  $p = 2$  hat man einen Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_\Omega u(x)v(x) dx.$$

Die entsprechenden Räume mit verallgemeinerten Ableitungen sind die **Sobolew-Räume**

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) : \text{für } |\alpha| \leq k \text{ besitzt } u \text{ schwache Ableitungen } D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}$$

mit

$$\|u\|_{k,p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Die Definition der schwachen Ableitung  $D^\alpha u$  geht dabei vom Gaußschen Integralsatz aus: für  $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen, gilt

$$(4.1) \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx = - \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx \quad , \quad j = 1, \dots, d.$$

Dabei ist  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  der Raum der  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \subset \Omega, \text{supp}(\varphi) \text{ kompakt}\}.$$

Falls es zu  $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  und zu jedem  $j \in \{1, \dots, d\}$  ein  $v_j \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  gibt, mit

$$(4.2) \quad \int_{\Omega} v_j(x)\varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

so sagt man,  $u$  besitzt verallgemeinerte Ableitungen  $v_j$  nach  $x_j$  und setzt

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} := v_j \quad (j = 1, \dots, d).$$

Man kann leicht zeigen, dass  $v_j \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  durch die Forderung (4.2) eindeutig bestimmt ist. Entsprechend sagt man, dass  $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  die verallgemeinerten Ableitungen  $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq k$  besitzt, falls es Funktionen  $v_\alpha \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  gibt mit

$$\int_{\Omega} v_\alpha(x)\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Wie oben ist es möglich zu zeigen, dass  $v_\alpha$  durch diese Relation eindeutig bestimmt ist. Man setzt dann

$$D^\alpha u := v_\alpha.$$

**Beispiel 4.1.**  $u(x) = |x|$  erfüllt  $u \in W^{1,p}(-1, 1) \forall p \geq 1$  mit  $u' = \text{sgn}$  ;

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , x \leq 0, \\ 1 & , x > 0, \end{cases}$$

$$\text{sgn} \in \mathcal{L}^p(-1, 1) \forall p \geq 1.$$

**Beweis:** Für alle  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(-1, 1)$  folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \text{sgn}(x)\varphi(x) dx &= - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x\varphi'(x) dx - \underbrace{x\varphi(x) \Big|_{-1}^0}_{=0 \text{ (komp. Träger)}} - \int_0^1 x\varphi'(x) dx + \underbrace{x\varphi(x) \Big|_0^1}_{=0} \\ &= - \int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

■

Stückweise glatte Funktionen dieser Art werden wir bei der Methode der **Finiten Elemente** wieder antreffen.

Im Fall  $p = 2$  wird  $H^k := W^{k,2}(\Omega)$  ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_2, \quad u, v \in H^k.$$

Schließlich erwähnen wir noch den Teilraum  $H_0^k(\Omega)$  von  $H^k(\Omega)$ , der durch Abschluss von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich  $\|\cdot\|_{k,2}$  entsteht. Man kann zeigen, dass  $H_0^k(\Omega)$  außer im Fall  $\Omega = \mathbb{R}^d$  ein echter Teilraum von  $H^k(\Omega)$  ist. Es handelt sich um die Funktionen, die in einem verallgemeinerten Sinne auf  $\partial\Omega$  verschwinden.

## 4.2 Wellengleichungen und stetige Halbgruppen

Betrachte für  $u(x, t)$  die sogenannte **Advektionsgleichung**

$$u_t = au_x, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$$

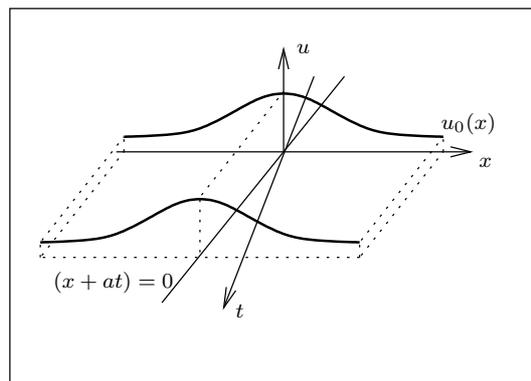
unter der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist offenbar gegeben durch

$$u(x, t) = u_0(x + at),$$

falls  $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R})$ . Dies ist eine sich mit der Geschwindigkeit  $-a$  fortpflanzende Welle. Die zugehörige Halbgruppe auf  $X = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist



$$\varphi^t(u_0)(x) = u_0(x + at).$$

Man sieht leicht, dass (D0) ( $\varphi^0(u_0) = u_0$ ) und (D1) ( $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$ ) erfüllt sind. Auch ist  $\varphi^t$  linear und stetig in  $u$ , da

$$\|\varphi^t(u)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x + at)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |u(y)| = \|u\|_\infty.$$

Aber  $t \rightarrow \varphi^t(u)$  ist im Allgemeinen nicht stetig:

$$\begin{aligned} \|\varphi^t(u) - \varphi^{t_0}(u)\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+at) - u(x+at_0)| \\ &= \sup_{\substack{y_0, y_1 \in \mathbb{R} \\ |y_0 - y_1| = |a||t - t_0|}} |u(y_0) - u(y_1)|, \end{aligned}$$

denn eine Funktion  $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist nicht notwendig gleichmäßig stetig. Ein Ausweg ist der Raum

$$X = \mathcal{C}_{\text{unif}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : u \text{ gleichmäßig stetig in } \mathbb{R}\},$$

der mit  $\|\cdot\|_\infty$  ein Banachraum wird, da  $\mathcal{C}_{\text{unif}}(\mathbb{R})$  ein bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{C}_b$  ist. Betrachte dazu eine Folge  $u_n \in \mathcal{C}_{\text{unif}}(\mathbb{R})$  mit  $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$  für ein  $u \in \mathcal{C}_b$ . Gegeben  $\varepsilon > 0$ , wähle  $N = N(\varepsilon)$  mit  $\|u_n - u\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \forall n \geq N(\varepsilon)$ . Da  $u_N \in \mathcal{C}_{\text{unif}}(\mathbb{R})$  erfüllt ist, existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $|t - s| \leq \delta$  gilt  $|u_N(t) - u_N(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , und somit

$$|u(t) - u(s)| \leq |u(t) - u_N(t)| + |u_N(t) - u_N(s)| + |u_N(s) - u(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist  $u \in \mathcal{C}_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ .

Für festes  $u \in \mathcal{C}_{\text{unif}}(\mathbb{R})$  ist dann auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{C}_{\text{unif}} \\ t &\longmapsto \varphi^t(u) \end{aligned}$$

stetig.

Allgemein definiert man

**Definition 4.2.** Sei  $X$  ein Banachraum und  $(X, \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t \geq 0})$  ein dynamisches System mit linearen stetigen Operatoren  $\varphi^t \in L[X]$ ,  $t \geq 0$ , so dass  $\varphi^t(u)$  für jedes  $u \in X$  bei  $t = 0$  stetig ist. Dann heißt  $\{\varphi^t\}_{t \geq 0}$  eine  $C^0$ -**Halbgruppe** (oder **stark stetige Halbgruppe**) auf  $X$ .

Wir benutzen im Folgenden aus der Funktionalanalysis bekannte Tatsachen:

Eine lineare Abbildung  $A : X \rightarrow X$  auf einem Banachraum  $X$  ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist, d. h. wenn ein  $C > 0$  existiert mit

$$\|Au\| \leq C\|u\| \quad \forall u \in X.$$

Der Raum  $L[X]$  der linearen stetigen Abbildungen  $A : X \rightarrow X$  ist selbst ein Banachraum bez. der Operatornorm

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Au\|}{\|u\|} : u \in X, u \neq 0 \right\} = \sup \{ \|Au\| : u \in X, \|u\| \leq 1 \}.$$

Schließlich gilt für Teilmengen  $M \subset L[X]$  das **Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit**, d. h. wenn es für jedes  $u \in X$  ein  $C(u) > 0$  gibt mit  $\|Au\| \leq C(u)$  für alle  $A \in M$ , so existiert auch ein  $C^* > 0$  mit  $\|A\| \leq C^*$  für alle  $A \in M$ .

Das folgende Lemma zeigt, dass eine  $C^0$ -Halbgruppe stets ein stetiges dynamisches System erzeugt.

**Lemma 4.3.** Sei  $\{\varphi^t\}_{t \geq 0}$  eine  $C^0$ -Halbgruppe auf  $X$ . Dann ist  $(X, \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t \geq 0})$  ein stetiges dynamisches System. Ferner existiert  $\gamma_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\varphi^t\|}{t}$ , und für jedes  $\gamma > \gamma_0$  existiert  $M_\gamma \geq 0$  mit

$$(4.3) \quad \|\varphi^t\| \leq M_\gamma e^{\gamma t} \quad \forall t \geq 0.$$

**Beweis: (i):** Wir zeigen zunächst, dass ein  $\tau > 0$  und ein  $C \geq 0$  existieren mit  $\|\varphi^t\| \leq C$  für  $0 \leq t \leq \tau$ . Wenn dies nicht der Fall ist, so gibt es eine Nullfolge  $t_n \geq 0$  mit  $\|\varphi^{t_n}\| \rightarrow \infty$ . Für jedes  $u \in X$  ist aber  $\{\|\varphi^{t_n}(u)\| : n \in \mathbb{N}\}$  wegen der Stetigkeit von  $\varphi^t(u)$  bei  $t = 0$  beschränkt. Mit  $M = \{\varphi^{t_n} : n \in \mathbb{N}\}$  liefert also das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit einen Widerspruch. Zu einem beliebigen  $T > 0$  wählen wir nun  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N\tau \geq T$  und erhalten  $\|\varphi^t\| \leq C^N$  für  $0 \leq t \leq T$  aus der Halbgruppeneigenschaft. Also existiert

$$K_T = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi^t\| < \infty.$$

Aus der Stetigkeit von  $\varphi^t(u)$  bei  $t = 0$  folgt die rechtsseitige Stetigkeit von  $\varphi^t(u)$  an jeder Stelle  $t_0 \geq 0$  (vgl. Abschnitt 2.1). Es gilt aber auch die linksseitige Stetigkeit bei  $t_0$ . Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  wähle  $\delta > 0$  mit  $\|\varphi^s(u_0) - u_0\| \leq \frac{\epsilon}{K_{t_0}}$  für  $0 \leq s \leq \delta$ . Dann folgt für  $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$

$$\|\varphi^t(u_0) - \varphi^{t_0}(u_0)\| = \|\varphi^t(u_0 - \varphi^{t_0-t}(u_0))\| \leq K_{t_0} \cdot \frac{\epsilon}{K_{t_0}} = \epsilon.$$

Schließlich ist auch  $(t, u) \rightarrow \varphi^t(u)$  stetig; denn für gegebene Folgen  $t_n \rightarrow t$ ,  $u_n \rightarrow u$  erhält man

$$\begin{aligned} \|\varphi^{t_n}(u_n) - \varphi^t(u)\| &\leq \|\varphi^{t_n}(u_n - u)\| + \|\varphi^{t_n}(u) - \varphi^t(u)\| \\ &\leq K_{t+1}\|u_n - u\| + \|\varphi^{t_n}(u) - \varphi^t(u)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**(ii):** Für  $\omega(t) = \ln \|\varphi^t\|$  gilt

$$\omega(t_1 + t_2) = \ln \|\varphi^{t_1} \circ \varphi^{t_2}\| \leq \ln(\|\varphi^{t_1}\| \|\varphi^{t_2}\|) = \ln \|\varphi^{t_1}\| + \ln \|\varphi^{t_2}\| = \omega(t_1) + \omega(t_2).$$

Setze  $\gamma_0 = \inf_{t > 0} \frac{\omega(t)}{t} < \infty$ , betrachte ein beliebiges  $\gamma > \gamma_0$  und wähle  $t_0 > 0$ , so dass

$$\gamma_0 \leq \frac{\omega(t_0)}{t_0} < \gamma.$$

Zerlege  $t \in \mathbb{R}_+$  gemäß  $t = nt_0 + r$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq r < t_0$  und erhalte mit der Subadditivität von  $\omega$  für  $t \rightarrow \infty$  (und damit  $n \rightarrow \infty$ )

$$\frac{\omega(t)}{t} \leq \frac{n\omega(t_0) + \omega(r)}{nt_0 + r} \leq \frac{\omega(t_0)}{t_0 + \frac{r}{n}} + \frac{\ln K_{t_0}}{t} \rightarrow \frac{\omega(t_0)}{t_0}.$$

Damit folgt  $\frac{\omega(t)}{t} \leq \gamma$  für  $t$  groß und somit

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(t)}{t} \leq \gamma.$$

Da dies für jedes  $\gamma > \gamma_0$  gilt, folgt  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(t)}{t} \leq \gamma_0$ . Daher existiert  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(t)}{t}$  und es gilt

$$\inf_{t > 0} \frac{\ln \|\varphi^t\|}{t} = \gamma_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\varphi^t\|}{t}.$$

Ferner gibt es zu jedem  $\gamma > \gamma_0$  ein  $t_\gamma > 0$  mit

$$\frac{\ln \|\varphi^t\|}{t} \leq \gamma \quad \forall t \geq t_\gamma,$$

also  $\|\varphi^t\| \leq e^{\gamma t}$  für  $t \geq t_\gamma$ . Also gilt die behauptete Abschätzung (4.3) mit

$$M_\gamma = \max \left( 1, \sup_{0 \leq t \leq t_\gamma} e^{-\gamma t} \|\varphi^t\| \right).$$

■

**Folgerung 4.4.** Die Operatoren  $\varphi^t u(x) = u(x + at)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  bilden sowohl auf  $X = C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  als auch auf  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  mit  $\|\cdot\|_2$  ein stetiges DS.

**Beweis:** Wegen Lemma 4.3 reicht es, die Beschränktheit von  $\varphi^t$  und die Stetigkeit von  $\varphi^t(u)$  bei  $t = 0$  zu zeigen. Für  $X = C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$  wurde dies bereits gezeigt. Für  $X = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  beachte

$$\|\varphi^t(u)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |u(x + at)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx = \|u\|_2^2$$

sowie

$$\|\varphi^h(u) - u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |u(x + ah) - u(x)|^2 dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Die zuletzt genannte Stetigkeit der Verschiebung bzgl. der  $\mathcal{L}^2$ -Norm ist aus der Maß- und Integrationstheorie bekannt. Man kann sie auch leicht einsehen, wenn man weiß, dass  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  dicht in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  liegt. Zunächst ist für  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  die Behauptung offensichtlich, da  $u$  gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es zu jedem  $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  mit

$$\|u - u_\varepsilon\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wählt man dann  $\delta > 0$  mit

$$\|\varphi^h(u_\varepsilon) - u_\varepsilon\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } |h| \leq \delta,$$

so folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi^h(u) - u\|_2 &\leq \|\varphi^h(u) - \varphi^h(u_\varepsilon)\|_2 + \|\varphi^h(u_\varepsilon) - u_\varepsilon\|_2 + \|u_\varepsilon - u\|_2 \\ &\leq 2\|u - u_\varepsilon\|_2 + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

In der Tat ist für diesen Fluss sowohl im Fall  $X = \mathcal{C}_{\text{unif}}(\mathbb{R})$  wie im Fall  $X = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  der infinitesimale Erzeuger (vgl. Abschnitt 1.2) durch den Operator  $a \frac{\partial}{\partial x}$  gegeben (Beweis als Übungsaufgabe):

**Folgerung 4.5.** *Der Grenzwert*

$$Au_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi^h(u_0) - u_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u_0(\cdot + ha) - u_0(\cdot))$$

existiert in  $(\mathcal{C}_{\text{unif}}, \|\cdot\|_\infty)$  bzw.  $(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$  genau dann, wenn  $u_0 \in \mathcal{C}_{\text{unif}}^1(\mathbb{R})$  bzw.  $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$  gilt. In beiden Fällen gilt  $Au_0 = au_0'$ .

In der Theorie der  $C^0$ -Halbgruppen zeigt man allgemein, dass der Limes für  $u_0 \in D(A)$  existiert, wobei  $D(A)$  ein dichter Teilraum von  $X$  ist.

**Die Wellengleichung** (Ausbreitung von Schall in Luft, Wasser, schwingende Saite, Wellen in Festkörpern)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Eine Möglichkeit, die Lösung zu bestimmen, ist der Übergang zu den Funktionen

$$\begin{aligned} v_1 &= cu_x - u_t, \\ v_2 &= cu_x + u_t. \end{aligned}$$

Sie erfüllen

$$\begin{aligned} (v_1)_t &= cu_{xt} - u_{tt} = cu_{xt} - c^2 u_{xx} = -c(cu_x - u_t)_x = -c(v_1)_x, \\ (v_2)_t &= cu_{xt} + u_{tt} = cu_{xt} + c^2 u_{xx} = c(v_2)_x. \end{aligned}$$

Mit den Anfangsdaten

$$v_1(x, 0) = cu_0' - v_0, \quad v_2(x, 0) = cu_0' + v_0$$

und unseren obigen Überlegungen zur Advektionsgleichung erhalten wir

$$v_1(x, t) = cu_0'(x - ct) - v_0(x - ct), \quad v_2(x, t) = cu_0'(x + ct) + v_0(x + ct).$$

Durch Subtraktion folgt

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)(x, t) = \frac{1}{2} \left[ c(u_0'(x + ct) - u_0'(x - ct)) + v_0(x + ct) + v_0(x - ct) \right],$$

und schließlich liefert Integration bez.  $t$  die **d'Alembertsche Lösungsdarstellung**

$$(4.4) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi.$$

Man kann die Wellengleichung auch als ein System 1. Ordnung schreiben, indem man  $v := u_t$  setzt. Man erhält dann

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} v \\ c^2 u_{xx} \end{pmatrix}, \text{ mit den Anfangsdaten } \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Hierfür wird dann im Raum  $X = H^1 \times \mathcal{L}_2$  ein invertierbares dynamisches System definiert durch

$$\varphi^t \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ u_t(x, t) \end{pmatrix},$$

wobei  $u, u_t$  durch die rechte Seite der d'Alembertschen Lösung gegeben sind.

### 4.3 Parabolische Anfangswertaufgaben

Wir beginnen mit der schon aus Numerik II bekannten **Wärmeleitungsgleichung**

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & \text{für } x \in (0, 1), t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Mit dem Operator

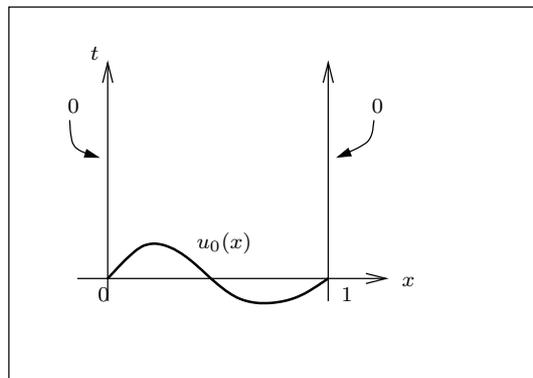


Abbildung 4.1: Anfangs- und Randdaten für die Wärmeleitungsgleichung

$$(4.6) \quad A : \begin{array}{ccc} D(A) := H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) & \longrightarrow & X = \mathcal{L}^2(0, 1), \\ u & \longmapsto & u_{xx}, \end{array}$$

können wir dies als

$$u_t = Au, \quad u \in X, \quad u(0) = u_0,$$

schreiben. Bei der Definition der Halbgruppe  $\varphi^t = e^{tA}$  bedienen wir uns der von den Matrizen bekannten Diagonalisierungstechnik: Bestimme also die Eigenwerte  $\lambda_k$  und Eigenvektoren  $v_k$  des Operators  $A$

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad \|v_k\|_2 = 1,$$

und setze

$$e^{tA}v_k = e^{t\lambda_k}v_k \text{ bzw. } e^{tA} \left( \sum_k c_k v_k \right) := \sum_k c_k e^{t\lambda_k} v_k.$$

Wir bestimmen  $v_k$ ,  $\lambda_k$  aus der Eigenwertaufgabe

$$v'' = \lambda v, \quad v(0) = v(1) = 0$$

und finden die Lösungen

$$\lambda_k = -(k\pi)^2, \quad v_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x), \quad k \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Eigenfunktionen sind orthogonal bezüglich des  $\mathcal{L}^2$ -Inneren Produktes  $(\cdot, \cdot)_2$

$$(v_k, v_l)_2 = \delta_{k,l}, \quad k, l \geq 1.$$

**Satz 4.6.** Jede Funktion  $u_0 \in \mathcal{L}^2(0, 1)$  lässt sich mit einer in  $\mathcal{L}^2$  konvergenten Reihe darstellen als

$$(4.7) \quad u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \text{ mit } c_k = (u_0, v_k)_2,$$

und es gilt

$$(4.8) \quad \|u_0\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \quad (\text{Parsevalsche Gleichung}).$$

**Beweis:** Aus der Analysis (siehe z.B. KÖNIGSBERGER Analysis I [13]) wissen wir, dass sich jede Funktion  $v \in \mathcal{L}^2[-1, 1]$  in eine bezüglich  $\| \cdot \|_2$  konvergente Fourier Reihe entwickeln lässt:

$$(4.9) \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\pi x) + b_k \cos(k\pi x)] + \frac{1}{2}b_0$$

mit

$$a_k = \int_{-1}^1 v(x) \sin(k\pi x) dx, \quad b_k = \int_{-1}^1 v(x) \cos(k\pi x) dx \quad k \geq 1,$$

$$b_0 = \int_{-1}^1 v(x) dx.$$

Wendet man dies auf

$$v(x) = \begin{cases} u_0(x) & , 0 \leq x \leq 1, \\ -u_0(x) & , -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

an, so folgt  $b_k = 0 \forall k \geq 0$  und

$$a_k = \int_{-1}^1 v(x) \sin(k\pi x) dx = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(k\pi x) dx = \sqrt{2}(u_0, v_k)_2.$$

Eingesetzt in (4.9) ergibt sich also die behauptete Gleichung (4.7):

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_2 \sqrt{2} \sin(k\pi \cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_2 v_k.$$

Die Parsevalsche Gleichung (4.8) erhält man mit dem folgenden Lemma. ■

**Lemma 4.7.** Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum und  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem in  $X$ . Dann gilt für  $c_k \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \text{ konvergiert,}$$

und in diesem Fall ist

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k \right\| = \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Beweis:** Für den Cauchy-Rest finden wir

$$\left\| \sum_{k=n}^m c_k v_k \right\|^2 = \left( \sum_{k=n}^m c_k v_k, \sum_{l=n}^m c_l v_l \right) = \sum_{k,l=n}^m c_k c_l \underbrace{(v_k, v_l)}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=n}^m c_k^2.$$

Hieraus ergibt sich '  $\Leftrightarrow$  '. Schließlich folgt die letzte Formel für  $n \rightarrow \infty$  aus

$$\left\| \sum_{k=0}^n c_k v_k \right\| = \left( \sum_{k=0}^n c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Wir können also im Fall der Wärmeleitungsgleichung die Anfangsfunktion  $u_0$  zerlegen gemäß

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k, \quad c_k = (u_0, v_k)_2$$

und setzen

$$\varphi^t(u_0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{t\lambda_k} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_2 e^{-tk^2\pi^2} \sqrt{2} \sin(k\pi \cdot).$$

Nach Satz 4.6 und Lemma 4.7 konvergiert diese Reihe in  $\mathcal{L}^2$  für jedes  $t \geq 0$  und

$$\|\varphi^t(u_0)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{2t\lambda_k} \leq e^{2t\lambda_1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq e^{2t\lambda_1} \|u_0\|_2^2.$$

Insbesondere ist damit  $\varphi^t$  ein linearer stetiger Operator in  $\mathcal{L}^2$  und es gilt sogar (vgl. Lemma 4.3 über die  $C^0$ -Halbgruppe)

$$\|\varphi^t\| \leq e^{\lambda_1 t} = e^{-\pi^2 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Schließlich erhalten wir

**Satz 4.8.** *Durch*

$$\varphi^t(u_0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{t\lambda_k} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_2 e^{-tk^2\pi^2} \sqrt{2} \sin(k\pi \cdot)$$

wird ein stetiges dynamisches System auf  $\mathcal{L}^2(0, 1)$  definiert.

**Beweis:** Nach dem Lemma 4.3 über die  $C^0$ -Halbgruppe bleibt die Stetigkeit von  $\varphi^t(u_0)$  bei  $t = 0$  zu zeigen.

Aus Lemma 4.7 folgt

$$\|\varphi^h(u_0) - u_0\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (e^{\lambda_k h} - 1)^2.$$

Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $K = K(\epsilon)$  mit  $\sum_{k=K+1}^{\infty} c_k^2 \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Anschließend wählen wir ein  $h(\epsilon) > 0$  mit

$$2\|u_0\|_2^2 (e^{\lambda_k h} - 1)^2 \leq \epsilon \quad \text{für } k = 1, \dots, K, h \leq h(\epsilon).$$

Durch Zusammensetzen folgt für  $h \leq h(\epsilon)$ .

$$\begin{aligned} \|\varphi^h(u_0) - u_0\|_2^2 &\leq \sum_{k=1}^K c_k^2 (e^{\lambda_k h} - 1)^2 + \sum_{k=K+1}^{\infty} c_k^2 (e^{\lambda_k h} - 1)^2 \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^K c_k^2 \right) \frac{\epsilon}{2\|u_0\|_2^2} + \sum_{k=K+1}^{\infty} c_k^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Wir bemerken noch abschließend, dass die Funktion

$$(4.10) \quad \varphi^t(u_0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{t\lambda_k} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_2 e^{-tk^2\pi^2} \sqrt{2} \sin(k\pi \cdot)$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \quad \text{für } x \in (0, 1), t \geq 0,$$

in einem schwachen Sinne löst (vgl. [6]). Außerdem kann man zeigen, dass der Operator  $A$  aus (4.6) der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe  $\varphi^t, t \geq 0$  mit dem dort angegebenen Definitionsbereich ist.

#### 4.4 Allgemeinere Aufgabenstellungen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir jeweils die einfachsten Gleichungen aus dem Bereich der parabolischen, bzw. hyperbolischen Differentialgleichungen angegeben. Aus Numerik II kennen wir bereits allgemeinere Anfangsrandwertaufgaben:

Betrachte die Reaktions-Diffusionsgleichung:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(u, x, t), & a < x < b, 0 \leq t, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in (a, b), \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

mit einer gegebenen Funktion  $f : \mathbb{R} \times (a, b) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir können dies formal als

$$(4.12) \quad \dot{u} = Au + F(u, t), \quad u(0) = u_0,$$

schreiben, wenn wir wieder  $A$  auf  $D(A)$  wie oben definieren und

$$[F(u, t)](x) = f(u(x), x, t) \text{ für } u \in X$$

setzen. Damit  $F(u, t)$  wieder in  $X$  liegt, benötigt man z.B. im Fall  $X = \mathcal{L}^2(0, 1)$  einschränkende Voraussetzungen an  $f$ :

$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times [a, b] \times \mathbb{R}_+),$$

$$|f(v, x, t)| \leq C_1(t)|v| + C_2(t) \quad \forall v \in \mathbb{R}, x \in [a, b], t \geq 0$$

mit gewissen nur von  $t$  abhängigen Konstanten  $C_1(t), C_2(t)$ .

(Man kann dann  $F(u, t) \in \mathcal{L}_2(0, 1)$  für  $u \in \mathcal{L}_2(0, 1)$  garantieren). Die Aufgabe (4.12) führt dann zu einem i.a. nichtlinearen und nicht autonomen dynamischen System  $(\mathcal{L}_2, \mathbb{R}_+, \{\varphi^{t,s}\}_{t,s>0})$ . Den Nachweis führt man, indem man auf die Variation der Konstanten Formel

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}F(u(s), s) ds$$

die aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannten Existenz- und Eindeigkeits-techniken anwendet.

Allgemeiner als die bereits angegebenen Randbedingungen sind Flussrandbedingungen (vgl. Numerik II)

$$\begin{aligned} \alpha_a u(a, t) - \beta_a u_x(a, t) &= \gamma_a(t), \quad t \geq 0, \\ \alpha_b u(b, t) - \beta_b u_x(b, t) &= \gamma_b(t). \end{aligned}$$

Lässt man in unseren Diffusionsbeispielen mehrdimensionale Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3, \dots$ ) zu, so erhält die Reaktions-Diffusionsgleichung die Form

$$(4.13) \quad u_t = \Delta u + f(u, x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

mit dem **Laplaceoperator**

$$\Delta u = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Geeignete Anfangsrandbedingungen lauten jetzt

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) &= 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq 0. \end{aligned}$$

Allgemeine Flussrandbedingungen haben dann die Form

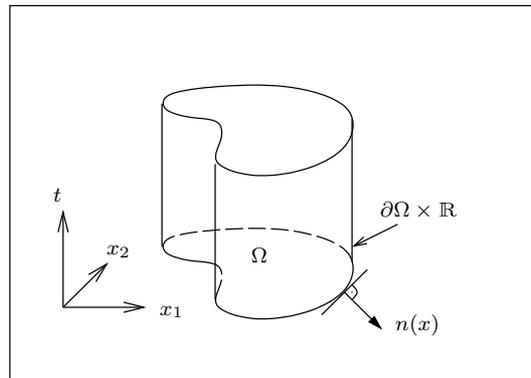


Abbildung 4.2: Gebiet für eine 3-dimensionale Reaktions-Diffusionsgleichung.

$$\alpha(x)u(x, t) + \beta(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \gamma(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0,$$

mit der Ableitung in **Richtung der äußeren Normalen**

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x)^T n(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Auch diese führen auf dem Weg über die Operator-Schreibweise mit

$$Au = \Delta u, \quad u \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

zu dynamischen Systemen in  $\mathcal{L}_2(\Omega)$ . Entsprechend dieser Sicht werden dann stationäre Zustände, periodische Orbits, Attraktoren etc. definiert. Ein **stationärer Zustand**  $u(x)$  von

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u, x, t), & x \in \Omega, t \geq 0, \\ u(x, t) &= 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq 0, \end{aligned}$$

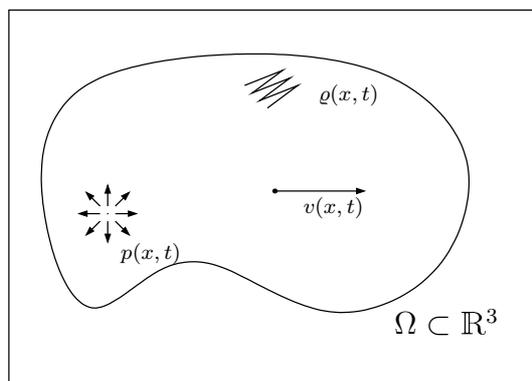
z. B. im autonomen (also  $t$ -unabhängigen) Fall ist eine Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u + f(u, x), & x \in \Omega, \\ u &= 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

In den vorangegangenen Beispielen können wir  $u(x, t)$  ohne weiteres als vektorwertig auffassen, wie es z.B. in der Reaktionskinetik mit mehreren beteiligten Substraten typischerweise auftritt (Numerik II). In diesem Fall sind dann in den Flussrandbedingungen die Koeffizienten  $\alpha, \beta$  als quadratische Matrizen zu lesen.

Schließlich nennen wir eines der bekanntesten Systeme partieller Differentialgleichungen, das für die gesamte Fluid- bzw. Aerodynamik fundamental ist, die **Navier-Stokes-Gleichungen**. Eine sehr gute, mathematisch gehaltene Einführung in diese Gleichungen findet man in [5]. Die gesuchten Größen sind für  $x \in \Omega, t \geq 0$

$\varrho(x, t) \in \mathbb{R}$	Dichte
$v(x, t) \in \mathbb{R}^3$	Geschwindigkeit
$p(x, t) \in \mathbb{R}$	Druck



Ohne innere Reibung (Viskosität) und ohne Haften an den Oberflächen erhält man die **Eulerschen Gleichungen**

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \varrho_t + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, & \text{Kontinuitätsgleichung} \\ v_t + (v^T \nabla)v + \frac{1}{\varrho} \nabla p &= b, & \text{Impulserhaltung.} \end{aligned}$$

Dabei ist folgende Notation benutzt worden

$$v^T \nabla = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

die Größe  $b(x, t)$  ist die äußere Beschleunigung (z.B. Erdbeschleunigung). Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus dem Transporttheorem Satz 3.3, wenn man dort eine zeitabhängige Dichte  $\rho(t, u)$  zulässt und  $\int_{\varphi^t(\Omega)} \rho(t, u) du$  nach  $t$  differenziert. Abgeschlossen wird das System z.B. durch eine Druck–Dichte Beziehung (isentropischer Fall):

$$p = p(\varrho), \text{ z. B. } p(\varrho) = c\varrho^\gamma.$$

Im inkompressiblen Fall ist  $\rho \equiv \text{const}$ , und die Kontinuitätsgleichung ist von der Form

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Zusätzliche Randbedingungen haben die Gestalt

$$(v - v_r)^T n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

wobei  $v_r^T n(x)$  eine vorgegebene Strömung in Normalenrichtung ist.

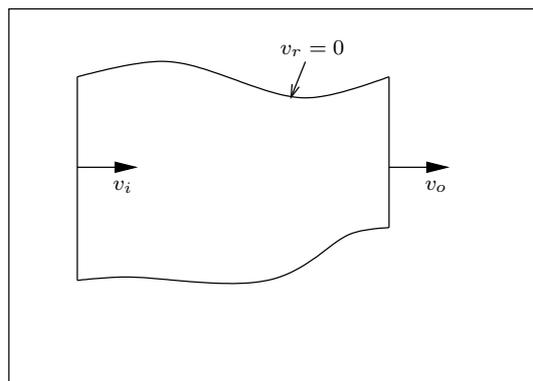


Abbildung 4.3: Gebiet und vorgegebene Strömung in Normalenrichtung auf dem Rand für die Euler-Gleichungen

Bei **viskose Strömungen** tritt ein Differentialoperator zweiter Ordnung in der Impulserhaltung zusätzlich auf. Die Flüssigkeit besitzt jetzt innere Reibung und haftet auch an den Oberflächen. Die Kontinuitätsgleichung bleibt unverändert und die Impulserhaltung wird ersetzt durch

$$(4.15) \quad v_t + (v^T \nabla)v = \frac{1}{\rho}(-\nabla p + (\lambda - \mu) \nabla(\operatorname{div} v) + \mu \Delta v) + b$$

mit den Viskositätskoeffizienten  $\lambda, \mu > 0$ . Auch jetzt kann man das System im inkompressiblen bzw. isentropischen Fall direkt abschließen. Im inkompressiblen Fall lauten die Navier-Stokes Gleichungen

$$(4.16) \quad v_t + (v^T \nabla)v + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta v + b, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

mit der **kinematischen Viskosität**  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

Dieses System ist im kompressiblen Fall vom gemischt hyperbolisch-parabolischen Typ. Im inkompressiblen Fall ist es vom parabolischen Typ mit einer nur die Ortsvariable betreffenden Nebenbedingung (der Divergenzfreiheit).

An den Rändern nimmt man jetzt in der Regel Dirichletsche Randbedingungen an

$$v(x, t) = v_r(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$

Dabei ist  $v_r = 0$  an Körperoberflächen (die Flüssigkeit haftet, 'no slip condition') und  $v_r$  an freien Randteilen durch die Einströmung, die Ausströmung oder freie Strömung weit

entfernt vom umströmten Objekt gegeben. In zwei Raumdimensionen kennt man sehr allgemeine Sätze, die garantieren, dass die Navier-Stokes Gleichungen zu einem dynamischen System in einem geeigneten Funktionenraum führen.

In drei Dimensionen ist dieses Problem nach wie vor weitgehend ungelöst (siehe [14], [21], [23]).

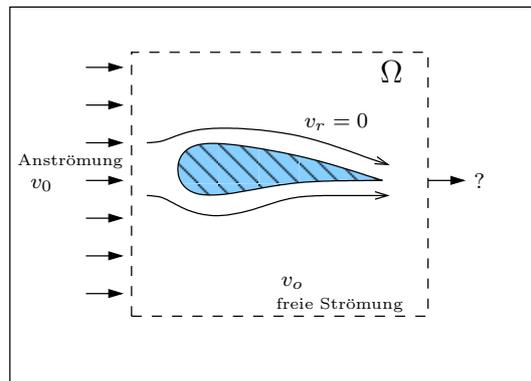


Abbildung 4.4: Das Navier-Stokes Problem für einen umströmten Flügel im zweidimensionalen Schnitt

# Kapitel II

## Langzeitverhalten numerischer Integrationsverfahren

In diesem Kapitel wollen wir einige der Fragen aus Kap. I, § 3 untersuchen, genauer wollen wir feststellen, ob und wie sich das Langzeitverhalten kontinuierlicher (endlich dimensionaler) Systeme auf ihre numerische Approximation überträgt.

### 1 Steife Differentialgleichungen und Stabilitätsgebiete

#### 1.1 Beispiele

Unser Ziel ist es, das globale Lösungsverhalten eines kontinuierlichen dynamischen Systems möglichst unabhängig vom Anfangswert und von der Schrittweite des gewählten Verfahrens numerisch abbilden zu können.

**Beispiele 1.1.** 1.) *Betrachte*

$$(1.1) \quad u_t = -u^3, \quad u(0) = u_0.$$

*mit der exakten Lösung*

$$u(t) = \begin{cases} -(u_0^{-2} + 2t)^{-\frac{1}{2}}, & u_0 < 0, \\ 0, & u_0 = 0, \\ (u_0^{-2} + 2t)^{-\frac{1}{2}}, & u_0 > 0. \end{cases}$$

*Man sieht:*

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \quad \forall u_0 \in \mathbb{R},$$

mit anderen Worten: Für das von (1.1) erzeugte dynamische System gilt  $\omega(u_0) = \{0\}$  für alle  $u_0 \in \mathbb{R}$  und 0 ist global asymptotisch stabiler Fixpunkt von (1.1). Die Diskretisierung mit dem explizitem Eulerverfahren liefert das diskrete dynamische System

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0, \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t(-(u^n)^3) = u^n(1 - \Delta t(u^n)^2), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Für  $\Delta t > 0$  erhält man (Beweis als Übungsaufgabe)

$$(1.3) \quad \begin{array}{lll} u^n & \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} & 0 \quad \text{für } 0 \leq \Delta t u_0^2 < 2, \\ u^{n+1} & = & -u^n \quad \text{für } \Delta t u_0^2 = 2, \\ |u^n| & \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} & \infty \quad \text{für } \Delta t u_0^2 > 2. \end{array}$$

Also ist 0 ein asymptotisch stabiler Fixpunkt, der  $U = \left(-\sqrt{\frac{2}{\Delta t}}, \sqrt{\frac{2}{\Delta t}}\right)$  anzieht, und  $\pm \sqrt{\frac{2}{\Delta t}}$  ist ein instabiler 2-periodischer Orbit.

Die Diskretisierung mit dem implizitem Eulerverfahren liefert

$$(1.4) \quad \begin{aligned} u^0 &= u_0 \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t(-u^{n+1})^3 \Leftrightarrow u^{n+1}(1 + \Delta t(u^{n+1})^2) = u^n. \end{aligned}$$

Da die Funktion  $G(u) := u(1 + \Delta t u^2)$ ,  $u \in \mathbb{R}$  glatt und streng monoton ist, ist sie ein Diffeomorphismus, und damit lässt sich auch das implizite Eulerverfahren als diskretes dynamisches System schreiben

$$u^0 = u_0, \quad u^{n+1} = \Phi_{\Delta t}(u^n) := G^{-1}(u^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus (1.4) folgt die Implikation ( $u^{n+1} = 0 \Rightarrow u^n = 0$ ) und somit

$$|u^{n+1}| = \frac{|u^n|}{1 + \Delta t |u^{n+1}|^2} < |u^n|.$$

Ein Widerspruchsbeweis liefert weiter

$$(1.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u^n = 0 \quad \forall u^0 = u_0 \in \mathbb{R}.$$

2.) Betrachte

$$(1.6) \quad u_t = Au, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^N, \quad N \geq 1 \quad \text{mit}$$

$$A = (N+1)^2 \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}.$$

Dieses kann man als Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+$$

mit Dirichlet-Randbedingungen  $u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \forall t > 0$  und Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1),$$

auffassen, wobei die Raumschrittweite als  $\Delta x = \frac{1}{N+1}$  gegeben ist.

Die Matrix  $A$  ist symmetrisch, und es gilt:

Für die Vektoren  $w^k = (w_1^k, \dots, w_N^k)^T \in \mathbb{R}^N$  mit

$$w_i^k = \sqrt{2} \sin\left(i \frac{k}{N+1} \pi\right), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N,$$

folgt aus den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} (Aw^k)_i &= \sqrt{2} \left( \sin\left((i-1) \frac{k\pi}{N+1}\right) - 2 \sin\left(i \frac{k\pi}{N+1}\right) + \sin\left((i+1) \frac{k\pi}{N+1}\right) \right) (N+1)^2 \\ &= \sqrt{2} \sin\left(i \frac{k\pi}{N+1}\right) \left( -2 + 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \right) (N+1)^2 \\ &= (N+1)^2 \left( -2 + 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \right) w_i^k, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Beachte, dass dies auch für  $i = 1$  und  $i = N$  gilt, da  $\sin\left((1-1) \frac{k\pi}{N+1}\right) = 0$  und  $\sin\left((N+1) \frac{k\pi}{N+1}\right) = 0$ .

Da  $w_1^k \neq 0$  für alle  $k$  und die Abbildung  $k \mapsto \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$  in  $(0, N+1)$  streng monoton fallend ist, bilden die  $w^k$  eine orthogonale Basis des  $\mathbb{R}^N$  aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten

$$\lambda_k = \left( -2 + 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \right) (N+1)^2 < 0 \quad \forall k.$$

Man erhält durch Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx -\pi^2 \quad \text{für } N \gg 1 \quad \text{und} \\ \lambda_N &\approx -4(N+1)^2 \quad \text{für } N \gg 1. \end{aligned}$$

Durch eine Koordinatentransformation kann man daher (1.6) als  $N$  entkoppelte skalare Gleichungen schreiben (vgl. Kap. I, Satz 2.15)

$$(1.7) \quad v_k' = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad v_k(0) = v_{k,0},$$

wobei  $u_0 = \sum_k v_{k,0} w^k$  gilt.

Wendet man das explizite Eulerverfahren auf (1.7) an, so ergibt sich

$$(1.8) \quad v_k^{n+1} = (1 + \lambda_k \Delta t) v_k^n, \quad v_k^0 = v_{k,0}.$$

Obwohl  $\lambda_k < 0$  für alle  $k$  gilt, damit also die kontinuierlichen Lösungen  $|v_k(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  für alle Anfangsdaten  $v_{k,0}$  erfüllen, ist dies für (1.8) nur richtig, falls  $|1 + \lambda_k \Delta t| < 1 \quad \forall k$ , insbesondere also nur, falls  $\Delta t$  die Ungleichung

$$|1 + \Delta t \underbrace{\left(-2 + 2 \cos\left(\frac{N}{N+1} \pi\right)\right)}_{\approx -4(N+1)^2} (N+1)^2| < 1$$

erfüllt. Dies erfordert (im Wesentlichen) die Bedingung  $0 < \Delta t < \frac{1}{2(N+1)^2}$  an  $\Delta t$ . Im Gegensatz dazu führt die Diskretisierung mit dem impliziten Eulerverfahren auf

$$(1.9) \quad v_k^{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda_k \Delta t} v_k^n,$$

woraus sich für alle  $\Delta t > 0$  die Konvergenz

$$(1.10) \quad |v_k^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ergibt.

**Beobachtungen:** Die Diskretisierung mit dem expliziten Eulerverfahren liefert in beiden Beispielen eine Einschränkung an die maximale Schrittweite. Beim impliziten Eulerverfahren führen beliebige Schrittweiten auf ein korrektes asymptotisches Verhalten (hier: Konvergenz gegen den asymptotisch stabilen Fixpunkt 0), (1.5), (1.10).

Nach Beispiel 1.1 ist es von Interesse, das Verhalten numerischer Verfahren schon für die einfache **Dahlquistsche Testgleichung**

$$(1.11) \quad u_t = \lambda u, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

zu untersuchen.

Bekanntlich ist die exakte Lösung von (1.11) gegeben durch

$$u(t) = e^{\lambda t} u_0$$

und  $\text{Re } \lambda < 0$  impliziert  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ . Wenden wir auf (1.11) ein  $k$ -Schrittverfahren mit Schrittweite  $\Delta t$  an, so führt dies auf eine Rekursion

$$(1.12) \quad u^n = \Phi_{\Delta t}(u^{n-1}, \dots, u^{n-k}, \lambda), \quad n = k, k+1, \dots$$

**Definition 1.2.** Für ein numerisches  $k$ -Schrittverfahren heißt

$$(1.13) \quad \mathcal{S} := \{ \lambda \Delta t \in \mathbb{C} : \exists C > 0, \text{ so dass die numerischen Werte } (u^n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ aus (1.12) für alle Anfangsdaten } u^0, \dots, u^{k-1} \text{ die Abschätzung } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u^n\| \leq C \max_{0 \leq j \leq k-1} \|u^j\| \text{ erfüllen } \}$$

das Gebiet absoluter Stabilität.

**Definition 1.3.** Ein  $k$ -Schrittverfahren heißt **A-stabil** genau dann, wenn

$$(1.14) \quad \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\} \subset \mathcal{S}.$$

**Beispiel 1.4.** An Gleichung (1.9) erkennt man, dass das implizite Eulerverfahren A-stabil ist.

## 1.2 Stabilitätsfunktion für Runge–Kutta–Verfahren

Um RK-Verfahren formal einfacher schreiben und mit ihnen leichter rechnen zu können, führen wir das **Kronecker-Produkt** von Matrizen ein:

**Definition 1.5.** Für  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{r,s}$ ,  $B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{k,\ell}$ ,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  definiere

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} B & \dots & a_{1s} B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} B & & a_{rs} B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{rk,sl}.$$

**Lemma 1.6.** Seien  $A \in \mathbb{K}^{s,s}$ ,  $B \in \mathbb{K}^{p,p}$ , dann gelten

- (i)  $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ ,
- (ii)  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ , sofern  $A^{-1}$  und  $B^{-1}$  existieren,
- (iii)  $\lambda_i, i = 1, \dots, s$  Eigenwerte von  $A$ ,  $\mu_i, i = 1, \dots, p$  Eigenwerte von  $B \Rightarrow A \otimes B$  hat die Eigenwerte  $\lambda_i \mu_j, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, p$ .
- (iv)  $A \in \mathbb{K}^{r,s}, C \in \mathbb{K}^{s,t}$   
 $B \in \mathbb{K}^{k,\ell}, D \in \mathbb{K}^{\ell,m} \Rightarrow (A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ .

**Beweis:** Als Übungsaufgabe. ■

Betrachte jetzt ein allgemeines  $s$ -stufiges RK-Verfahren mit dem Butcher-Tableaux

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline & \gamma \end{array}.$$

Angewandt auf die Differentialgleichung

$$(1.15) \quad u_t = f(u), \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m),$$

liefert es

$$(1.16) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = V(u^n, \Delta t)$$

mit der Verfahrensfunktion

$$(1.17) \quad V(v, \Delta t) = \sum_{i=1}^s \gamma_i k_i(v, \Delta t) = (\gamma \otimes I_m)^T K,$$

wobei  $K := (k_1 \ \dots \ k_s)^T$ . Dabei erhält man  $K$  als die Lösung des Gleichungssystems

$$(1.18) \quad k_i = f(v + \Delta t \sum_{j=1}^s \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, s.$$

Um dies kompakt zu schreiben, führen wir das Blockdiagonalfeld  $F = I_s \otimes f$  ein durch

$$F \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_s) \end{pmatrix} = (I_s \otimes f) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix}.$$

Definieren wir noch  $\mathbb{1}_s = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$ , so lässt sich (1.18) mit dem Kronecker-Produkt schreiben als

$$(1.19) \quad K = \begin{pmatrix} f(v + \Delta t \sum_{j=1}^s \beta_{1j} k_j) \\ \vdots \\ f(v + \Delta t \sum_{j=1}^s \beta_{sj} k_j) \end{pmatrix} = (I_s \otimes f) (\mathbb{1}_s \otimes v + \Delta t (\beta \otimes I_m) K).$$

Für eine lineare DGL

$$(1.20) \quad u_t = Au, \quad A \in \mathbb{C}^{m,m}$$

vereinfacht sich (1.19) zu

$$(1.21) \quad \begin{aligned} K &= (I_s \otimes A)(\mathbb{1}_s \otimes v + \Delta t (\beta \otimes I_m) K) \\ \Leftrightarrow K &= (I_{ms} - \Delta t (\beta \otimes A))^{-1} (\mathbb{1}_s \otimes A) v \end{aligned}$$

und zusammen mit (1.16), (1.17) lautet die Iteration

$$(1.22) \quad u^{n+1} = (I_m + \Delta t (\gamma \otimes I_m))^T (I_{ms} - \Delta t (\beta \otimes A))^{-1} (\mathbb{1}_s \otimes A) u^n.$$

Sei jetzt  $P \in GL(\mathbb{C}^m)$  mit

$$J = P^{-1} A P, \quad \text{Jordan-Normalform .}$$

Die Transformation  $v = P^{-1}u$  überführt (1.20) in

$$(1.23) \quad v_t = P^{-1}u_t = P^{-1}Au = P^{-1}A P P^{-1}u = Jv.$$

Wir untersuchen nun, wie (1.22) sich unter  $P$  transformiert. Setze  $v^n = P^{-1}u^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dann ergibt sich mit Lemma 1.6

$$(1.24) \quad \begin{aligned} v^{n+1} &= P^{-1} u^{n+1} \\ &= P^{-1} [I_m + \Delta t (\gamma \otimes I_m)]^T (I_{ms} - \Delta t (\beta \otimes A))^{-1} (\mathbb{1}_s \otimes A) P v^n \\ &= [I_m + \Delta t \underbrace{P^{-1}(\gamma \otimes I_m)}_{=(\gamma \otimes I_m)^T I_s \otimes P^{-1}}]^T (I_{ms} - \Delta t (\beta \otimes A))^{-1} \underbrace{(\mathbb{1}_s \otimes A P)}_{=(I_s \otimes P)(\mathbb{1}_s \otimes J)} v^n \\ &= [I_m + \Delta t (\gamma \otimes I_m)]^T \underbrace{(I_s \otimes P)^{-1} (I_{ms} - \Delta t (\beta \otimes A))^{-1} (I_s \otimes P)}_{=(I_{ms} - \Delta t \beta \otimes J)^{-1}} (\mathbb{1}_s \otimes J) v^n \\ &= [I_m + \Delta t (\gamma \otimes I_m)]^T (I_{ms} - \Delta t \beta \otimes J)^{-1} (\mathbb{1}_s \otimes J) v^n. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass Ähnlichkeitstransformation und Runge–Kutta Diskretisierung von (1.20) kommutieren

$$\begin{array}{ccc} u_t = Au & \xrightarrow[J=P^{-1}AP]{u=Pv} & v_t = Jv \\ \downarrow RK & & \downarrow RK \\ u^{n+1} = \Phi_{\Delta t}(u^n) & \xrightarrow[J=P^{-1}AP]{u^n=Pv^n} & v^{n+1} = \tilde{\Phi}_{\Delta t}(v^n) \end{array}$$

Damit ist insbesondere für diagonalisierbare Systeme gerechtfertigt, dass es genügt das Lösungsverhalten für die skalare Gleichung (1.11) zu untersuchen. Im Spezialfall der skalaren Gleichung (1.11) lautet ein allgemeines RK–Verfahren nach (1.24):

$$(1.25) \quad \begin{aligned} u^0 &= u_0, \\ u^{n+1} &= (1 + \Delta t \lambda \gamma^T (I_s - \Delta t \lambda \beta)^{-1} \mathbb{1}_s) u^n \\ &=: R(\lambda \Delta t) u^n. \end{aligned}$$

**Definition 1.7.** Die Funktion

$$(1.26) \quad R(z) = 1 + z \gamma^T (I_s - z\beta)^{-1} \mathbb{1}_s$$

heißt **Stabilitätsfunktion** des RK–Verfahrens zum Tableau

$$\frac{\alpha}{\gamma} \left| \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} \right.$$

**Satz 1.8** (Stabilitätsgebiet für Runge–Kutta Verfahren). Für RK–Verfahren gilt

$$(1.27) \quad \mathcal{S} = \{z : |R(z)| \leq 1\}.$$

**Beweis:** Dies folgt direkt aus Definition 1.2 und der Rekursion (1.25). ■

**Bemerkung:** In der Literatur wird oft (1.27) zur Definition des Gebietes absoluter Stabilität benutzt.

**Lemma 1.9.**  $R(z)$  ist eine rationale Funktion und lässt sich für  $z \in \mathbb{C}$ , für die die RK–Gleichungen eindeutig lösbar sind, schreiben als

$$(1.28) \quad R(z) = \frac{\det(I_s - z\beta + z\mathbb{1}_s \gamma^T)}{\det(I_s - z\beta)}.$$

**Beweis:** Wegen  $R(z) - z \gamma^T (I_s - z\beta)^{-1} \mathbb{1}_s = 1$  gilt die folgende Block LR–Zerlegung

$$(1.29) \quad \begin{pmatrix} I_s - z\beta & \mathbb{1}_s \\ -z\gamma^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s - z\beta & 0 \\ -z\gamma^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s & (I_s - z\beta)^{-1} \mathbb{1}_s \\ 0 & R(z) \end{pmatrix}.$$

Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so folgt

$$R(z) \det(I_s - z\beta) = \det \begin{pmatrix} I_s - z\beta & \mathbb{1}_s \\ -z\gamma^T & 1 \end{pmatrix}.$$

Elimination der Einsen in  $\mathbb{1}_s$  mittels der letzten Zeile ergibt

$$\det \begin{pmatrix} I_s - z\beta & \mathbb{1}_s \\ -z\gamma^T & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_s - z\beta + z\mathbb{1}_s\gamma^T & 0 \\ -z\gamma^T & 1 \end{pmatrix} = \det(I_s - z\beta + z\mathbb{1}_s\gamma^T)$$

und damit die Behauptung. ■

**Bemerkung:** Als rationale Funktion hat  $R(z)$  eine Darstellung

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit} \quad \text{Grad}(p), \text{Grad}(q) \leq s.$$

Die Nullstellen von  $q(z)$  sind gerade  $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} \in \sigma(\beta)\}$ . Für eine Matrix  $Z \in \mathbb{C}^{m,m}$  mit  $\sigma(Z^{-1}) \cap \sigma(\beta) = \emptyset$  definiert man  $R(Z) = p(Z)q(Z)^{-1} \in \mathbb{C}^{m,m}$ . Man kann zeigen (Übungsaufgabe), dass dann analog zu (1.26) gilt

$$R(Z) = I_m + (\gamma \otimes I_m)^T (I_{ms} - \beta \otimes Z)^{-1} (\mathbb{1}_s \otimes Z).$$

Die Rekursion (1.22) schreibt sich jetzt als

$$u^{n+1} = R(\Delta t A) u^n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

was eine direkte Übertragung von (1.25) auf den Fall linearer Systeme (1.20) darstellt.

**Folgerung 1.10.** *Kein explizites RK-Verfahren ist A-stabil.*

**Beweis:** Da für explizite RK-Verfahren  $\beta_{ij} = 0 \quad \forall j \geq i$ , folgt

$$\det(I_s - z\beta) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ferner liefert die Konsistenz des RK-Verfahrens für die Gleichung  $u_t = u, u(0) = 1$ :

$$\left| \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} - \frac{R(\Delta t) - 1}{\Delta t} \right| = \frac{1}{\Delta t} |e^{\Delta t} - R(\Delta t)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

so dass  $R(z)$  nicht konstant sein kann. Also ist  $R(z)$  ein nichtkonstantes Polynom und erfüllt  $\lim_{z \rightarrow \infty} |R(z)| = \infty$ . Also ist  $|R(z)| \leq 1 \quad \forall \text{Re } z \leq 0$  nicht möglich und somit  $\mathbb{C}^- \not\subset \mathcal{S}$ . ■

**Beispiele 1.11.** 1.) *Explizites Eulerverfahren:*

$$\frac{0}{1}$$

$$R(z) = 1 + z,$$

$$\mathcal{S} = \{z : |1 + z| \leq 1\}$$

2.) Verfahren von Heun:

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$R(z) = \det\left(I_2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z & \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z & \frac{1}{2}z \end{pmatrix}\right) = 1 + z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1 + z + \frac{1}{2}z^2,$$

$$\mathcal{S} = \left\{z : \left|1 + z + \frac{1}{2}z^2\right| \leq 1\right\}$$

3.) Implizites Eulerverfahren:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$R(z) = \frac{1}{1-z},$$

$$\mathcal{S} = \left\{z : \frac{1}{|1-z|} \leq 1\right\} = \{z : |1-z| \geq 1\}$$

4.) Crank–Nicholson Verfahren (Trapezmethode):

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z},$$

$$\mathcal{S} = \mathbb{C}^-.$$

**Satz 1.12.** Sei  $\mathcal{S}$  das Gebiet absoluter Stabilität eines RK-Verfahrens und  $z = \lambda\Delta t \in \mathcal{S}$ .

Dann gilt für zwei numerische Lösungen  $u^n = \Phi_{\Delta t}^n u^0$  und  $v^n = \Phi_{\Delta t}^n v^0$  zur Schrittweite  $\Delta t$  der Aufgabe  $u' = \lambda u$ , mit den Anfangswerten  $u^0$  bzw.  $v^0$ , die Abschätzung

$$(1.30) \quad |u^{n+1} - v^{n+1}| \leq |u^n - v^n|.$$

Ist  $\lambda\Delta t \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$ , so folgt sogar eine strikte Ungleichung.

Bevor wir den Satz beweisen, erinnern wir an das aus der Funktionentheorie bekannte Maximumprinzip für holomorphe Funktionen.

**Satz 1.13** (Maximumprinzip). Eine nichtkonstante holomorphe Funktion  $f$  auf einem (offenen) Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  erfüllt

$$|f(z)| < \sup_{y \in G} |f(y)| \quad \forall z \in G.$$

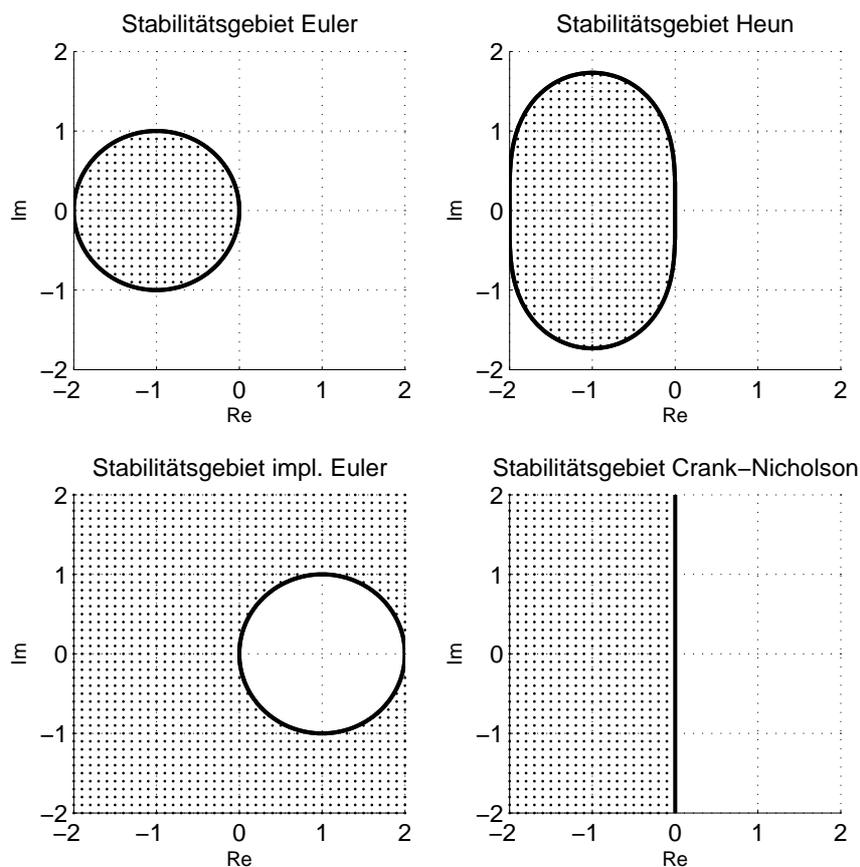


Abbildung 1.1: Stabilitätsgebiete (gepunktete Fläche) in der komplexen Ebene für das explizite Eulerverfahren (links oben), das Heunverfahren (rechts oben), das implizite Eulerverfahren (unten links) und das Crank-Nicholson-Verfahren (unten rechts)

**Beweis:** In jedem Buch über Funktionentheorie (z. B. siehe [20]). ■

**Beweis von Satz 1.12:** Klar ist

$$|u^{n+1} - v^{n+1}| = |R(z)| |u^n - v^n| \leq |u^n - v^n| \quad \forall z \in \mathcal{S}.$$

Als rationale Funktion  $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  ( $p, q$  teilerfremd) mit  $|R(z)| \leq 1$  für  $z \in \mathcal{S}$  hat  $R$  keine Pole in  $\bar{\mathcal{S}}$ . Wegen Satz 1.8 ist daher  $\mathcal{S}$  abgeschlossen. Für  $z_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{S}} \subset \bar{\mathcal{S}}$  folgt dann aus dem Maximumprinzip, Satz 1.13, entweder ist  $|R(z_0)| < 1$  oder  $R$  ist konstant. Wie im Beweis von Folgerung 1.10 kann  $R$  aus Konsistenzgründen nicht konstant sein. ■

### 1.3 Stabilitätsgebiete linearer Mehrschrittverfahren

Die allgemeine Form eines linearen  $k$ -Schrittverfahrens für die Aufgabe

$$u_t = f(u)$$

lautet

$$(1.31) \quad \frac{1}{\Delta t} \sum_{\nu=0}^k a_\nu u^{j+\nu} = \sum_{\nu=0}^k b_\nu f(u^{j+\nu}), \quad j = 0, 1, \dots,$$

mit Anfangsdaten

$$u^0, \dots, u^{k-1}.$$

Man sieht leicht, dass die Diskretisierung (1.31) mit einer linearen Koordinatentransformation vertauscht:

$$\begin{aligned} v &= P^{-1}u \\ v_t &= P^{-1}f(Pv) \quad \text{und} \\ v^j &= P^{-1}u^j, \quad j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{\nu=0}^k a_\nu v^{j+\nu} = \sum_{\nu=0}^k b_\nu P^{-1}f(u^{j+\nu}) = \sum_{\nu=0}^k b_\nu P^{-1}f(Pv^{j+\nu}).$$

Daher betrachten wir wieder die Dahlquistische Testgleichung (1.11) und erhalten die lineare homogene Differenzgleichung

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{\nu=0}^k a_\nu u^{j+\nu} = \sum_{\nu=0}^k \lambda b_\nu u^{j+\nu}, \quad j \in \mathbb{N},$$

oder äquivalent

$$(1.32) \quad \sum_{\nu=0}^k (a_\nu - \Delta t \lambda b_\nu) u^{j+\nu} = 0, \quad j \in \mathbb{N},$$

mit Anfangsdaten  $u^0, \dots, u^{k-1}$ .

Setze

$$q(z, \xi) := \sum_{\nu=0}^k (a_\nu - z b_\nu) \xi^\nu = \sum_{\nu=0}^k q_\nu(z) \xi^\nu = \rho(\xi) - z\sigma(\xi)$$

mit

$$\rho(\xi) := \sum_{\nu=0}^k a_\nu \xi^\nu, \quad \sigma(\xi) := \sum_{\nu=0}^k b_\nu \xi^\nu, \quad q_\nu(z) = a_\nu - z b_\nu.$$

Mit dem Shiftoperator

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \tau : &(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow (u_{j+1})_{j \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

kann man (1.32) auch schreiben als

$$(\rho(\tau) - \Delta t \lambda \sigma(\tau))u = 0.$$

Es ist sinnvoll  $\rho$  und  $\sigma$  als teilerfremd anzunehmen, da sonst  $\xi_0$  und Polynome  $\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}$  existieren mit

$$\rho(\xi) = (\xi - \xi_0)\tilde{\rho}(\xi), \quad \sigma(\xi) = (\xi - \xi_0)\tilde{\sigma}(\xi).$$

Jede Lösung  $(\tilde{u}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  der Differenzengleichung

$$((\tilde{\rho}(\tau) - \lambda \Delta t \tilde{\sigma}(\tau))\tilde{u})_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

ist dann auch eine Lösung der ursprünglichen Differenzengleichung.

**Definition 1.14.** Ein lineares Mehrschrittverfahren, für das die Polynome  $\rho$  und  $\sigma$  teilerfremd sind, heißt **irreduzibel**.

**Satz 1.15.** Für ein lineares Mehrschrittverfahren ist das Gebiet absoluter Stabilität gegeben durch

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : q(z, \xi) = 0 \Rightarrow |\xi| < 1, \text{ oder} \\ |\xi| = 1 \text{ und } \xi \text{ ist einfache Nullstelle von } q(z, \cdot)\}.$$

**Beweis:** Dies folgt aus der Theorie der Differenzengleichungen in Numerik II, Kapitel III, Lemma 3.1.1:

O.B.d.A. können wir  $z \in \mathbb{C}$  mit  $q_k(z) = a_k - zb_k \neq 0$  betrachten. Im Fall  $a_k - zb_k = 0$  ist nämlich (1.32) eine Differenzengleichung der Ordnung  $\tilde{k} < k$ , und wir können die folgenden Überlegungen mit  $\tilde{k}$  anstelle von  $k$  durchführen.

Seien  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  die verschiedenen Nullstellen von  $q(z, \cdot)$  mit Vielfachheiten  $K_i$ . Dann ist ein Fundamentalsystem der Differenzengleichung (1.32) gegeben durch

$$(1.33) \quad v_j^{(i, \nu)} = j \cdot \dots \cdot (j - \nu + 1) \xi_i^{j - \nu}, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad \nu = 0, \dots, K_i - 1, \quad j \in \mathbb{N},$$

und alle Lösungen von (1.32) sind von der Form

$$w^j = \sum_{i, \nu} c_{i, \nu} v_j^{(i, \nu)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Da die  $c_{i, \nu}$  sich als Lösung des linearen Systems

$$\sum_{i, \nu} c_{i, \nu} v_j^{(i, \nu)} = w^j, \quad j = 0, \dots, k - 1,$$

ergeben, ist (1.13) äquivalent dazu, dass die Fundamentallösungen  $v_j^{(i, \nu)}$  gleichmäßig in  $j$  beschränkt sind. Lemma 3.1.2 aus Numerik II, Kapitel III sagt aber, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die **Wurzelbedingung** für  $q(z, \cdot)$  erfüllt ist, d. h. wenn gilt

$$q(z, \xi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |\xi| < 1, \text{ oder} \\ |\xi| = 1 \text{ und } \xi \text{ ist einfache Nullstelle von } q(z, \cdot). \end{cases}$$

■

**Lemma 1.16.** *Ein irreduzibles,  $A$ -stabiles lineares  $k$ -Schrittverfahren angewandt auf die Testgleichung (1.11) mit  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  erfüllt*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u^j = 0$$

für alle Anfangswerte  $u_0, \dots, u_{k-1}$ .

**Beweis:** Sei  $\Delta t > 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ ,  $z_0 := \lambda \Delta t$ . Wir zeigen, dass alle Nullstellen  $\xi$  von  $q(z, \xi) = 0$  bereits  $|\xi| < 1$  erfüllen. Aus (1.33) folgt dann  $|v_j^{(i, \nu)}| \leq j^\nu |\xi_i|^{j \cdot \nu} \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$  und damit die Konvergenz  $u^j \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ .

Angenommen,  $\exists \xi_0 \in \mathbb{C}$ ,  $|\xi_0| = 1$  mit  $q(z_0, \xi_0) = 0$ , so folgt

$$\frac{\partial}{\partial \xi} q(z_0, \xi_0) \neq 0,$$

weil  $\xi_0$  nach Satz 1.15 eine einfache Nullstelle ist.

Der Satz über implizite Funktionen für holomorphe Abbildungen zeigt:

Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $\xi_0$ , eine Umgebung  $V \subset \mathbb{C}^-$  von  $z_0$ , sowie  $g : V \rightarrow U$  holomorph mit  $g(z_0) = \xi_0$  und

$$(q(z, \xi) = 0, z \in V, \xi \in U) \Leftrightarrow (z \in V, \xi = g(z)).$$

Nun kann  $g$  aber nicht konstant sein, denn wäre  $g(z) = \xi_0 \quad \forall z \in V$ , so folgt

$$0 = \rho(\xi_0) + z\sigma(\xi_0) \quad \forall z \in V \Rightarrow \sigma(\xi_0) = \rho(\xi_0) = 0$$

im Widerspruch zur Irreduzibilität.

Wir wenden das Maximumprinzip aus Satz 1.13 auf  $g$  und  $G = V$  und erhalten  $1 = |g(z_0)| < \sup_{z \in V} |g(z)|$ . Es gibt also Punkte  $z \in V \subset \mathbb{C}^-$  mit  $|g(z)| > 1$ ,  $q(z, g(z)) = 0$ , im Widerspruch zu Satz 1.15. ■

Satz 1.15 und Lemma 1.16 legen nahe, nach  $A$ -stabilen linearen Mehrschrittverfahren zu suchen und dabei eine möglichst hohe Konsistenzordnung zu verlangen. Diese Suche ist leider nicht sehr erfolgreich, wie das folgende berühmte negative Resultat von Dahlquist zeigt.

**Satz 1.17. Zweite Dahlquist-Schranke** *Ein  $A$ -stabiles lineares Mehrschrittverfahren hat maximal die Konsistenzordnung 2.*

**Beweis:** Siehe [11]. ■

## 2 Dynamik in der Nähe von Gleichgewichten

Wir wollen nun **globale Konvergenzaussagen** numerischer Verfahren für Aufgaben der Form  $u' = f(u)$  herleiten. In Numerik II haben wir stets Konvergenz auf endlichen Intervallen untersucht und im allgemeinen Konvergenzaussagen mit sehr schlechten Konstanten für große Intervalllängen erhalten. Typischerweise sind die Abschätzungen des Konvergenzfehlers von der Form

$$\|\bar{u}_h - u_h\|_\infty \leq C e^{L(t_e - t_0)} \|\tau_h\|_\infty,$$

wobei  $\|\tau_h\|_\infty$  den maximalen Konsistenzfehler auf einem Intervall  $[t_0, t_e]$  und  $L$  eine Lipschitzkonstante von  $f$  bezeichnet.

### 2.1 Gleichgewichte und Konsistenzfehler

Die Differentialgleichung

$$(2.1) \quad u' = f(u), \quad f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ glatt,}$$

erzeugt ein kontinuierliches dynamisches System  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t \geq 0})$ . Ebenso können wir die Lösung von (2.1) mit numerischen Einschrittverfahren (z. B. Runge–Kutta Verfahren)

$$(2.2) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \underbrace{V(u^n, \Delta t)}_{\text{Verfahrensfunktion}}$$

als ein diskretes DS  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, (\Phi_{\Delta t}^n)_{n \in \mathbb{N}})$  schreiben, wobei

$$(2.3) \quad u^{n+1} = \Phi_{\Delta t}(u^n) := u^n + \Delta t V(u^n, \Delta t).$$

Der Konsistenzfehler an einer Lösung  $\bar{u}$  zum Zeitpunkt  $t$  ist

$$\begin{aligned} \tau_{\Delta t}(t) &= \frac{1}{\Delta t} (\bar{u}(t + \Delta t) - \bar{u}(t)) - V(\bar{u}(t), \Delta t) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (\varphi^{\Delta t}(\bar{u}(t)) - \bar{u}(t)) - \frac{1}{\Delta t} (\Phi_{\Delta t}(\bar{u}(t)) - \bar{u}(t)) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (\varphi^{\Delta t}(\bar{u}(t)) - \Phi_{\Delta t}(\bar{u}(t))). \end{aligned}$$

Konsistenz der Ordnung  $p$  an der Lösung  $\bar{u}$  bedeutet

$$(2.4) \quad \|\varphi^{\Delta t}(\bar{u}(t)) - \Phi_{\Delta t}(\bar{u}(t))\| \leq C \Delta t^{p+1} \quad \forall t.$$

Wir werden (2.4) gleichmäßig in jedem Kompaktum voraussetzen.

**Generalvoraussetzung:** Zu jedem Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^m$  gibt es positive Konstanten  $C = C(K)$  und  $h_0 = h_0(K)$  mit

$$(K) \quad \|\varphi^{\Delta t}(v) - \Phi_{\Delta t}(v)\| \leq C \Delta t^{p+1} \quad \forall v \in K, \quad -h_0 \leq \Delta t \leq h_0.$$

**Bemerkung 2.1.** Falls  $f$  eine genügend glatte Funktion ist, so ist die Voraussetzung (K) für RK-Verfahren der Konsistenzordnung  $p$  erfüllt.

**Folgerung 2.2.** Sei  $k \geq p + 2$ ,  $f \in C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ,  $h_0 > 0$  mit

$$\varphi = \varphi(\cdot) \in C^k((-h_0, h_0) \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

zugehöriger Evolutionsoperator, und sei

$$\Phi = \Phi(\cdot) \in C^k((-h_0, h_0) \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

ein Einschrittverfahren, das (K) erfüllt.

Dann gibt es für alle kompakten  $K \subset \mathbb{R}^m$  ein  $0 < h < h_0$  und  $C_1 = C_1(K, h)$  mit

$$(2.5) \quad \|D_v \varphi^{\Delta t}(v) - D_v \Phi_{\Delta t}(v)\| \leq C_1 |\Delta t|^{p+1}, \quad \forall -h \leq \Delta t \leq h, \quad v \in K$$

$$(2.6) \quad \|D_t D_v \varphi^{\Delta t}(v) - D_t D_v \Phi_{\Delta t}(v)\| \leq C_1 |\Delta t|^p, \quad \forall -h \leq \Delta t \leq h, \quad v \in K.$$

**Beweis:** Sei  $K$  kompakt. Setze

$$\psi(\Delta t, v) := \varphi^{\Delta t}(v) - \Phi_{\Delta t}(v) \in C^k((-h_0, h_0) \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m).$$

Taylorentwicklung nach  $t$  liefert:

$$(2.7) \quad \psi(\Delta t, v) = \sum_{j=0}^p D_t^j \psi(0, v) \frac{\Delta t^j}{j!} + \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-s)^p D_t^{p+1} \psi(s\Delta t, v) ds \Delta t^{p+1}.$$

Aus (K) folgt

$$D_t^j \psi(0, v) = 0, \quad j = 0, \dots, p.$$

Differenziere (2.7) nach  $v$

$$D_v \psi(\Delta t, v) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-s)^p D_t^{p+1} D_v \psi(s\Delta t, v) ds \Delta t^{p+1},$$

damit folgt für  $h < h_0$  aus der Stetigkeit von  $D_t^{p+1} D_v \psi$  auf  $[-h, h] \times K$

$$\|D_v \psi(\Delta t, v)\| \leq C_1 \Delta t^{p+1} \quad \forall v \in K, \quad -h \leq \Delta t \leq h.$$

Analog folgt (2.6), indem man die Taylorentwicklung

$$(2.8) \quad D_t \psi(\Delta t, v) = \sum_{j=0}^{p-1} \underbrace{D_t^{p+1} \psi(0, v)}_{=0} \frac{\Delta t^j}{j!} + \frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 (1-s)^{p-1} D_t^{p+1} \psi(s\Delta t, v) ds \Delta t^p$$

nach  $v$  differenziert. ■

**Bemerkung 2.3.** Glattheit von  $\varphi$  folgt aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz sowie aus der glatten Abhängigkeit von Anfangsdaten, falls  $f$  glatt und global Lipschitz ist. Für allgemeine  $f \in C^k$  ist  $\varphi$  noch in  $C^k((-h_0, h_0) \times U, \mathbb{R}^m)$ , wobei  $U$  beschränkte offene Menge ist und  $h_0$  von  $U$  abhängt. Ebenso verhält es sich mit den Glattheiten von  $\Phi$ . Für RK-Verfahren wurde dies zum Beispiel in Numerik II, Kapitel 2.5 und Kapitel 2.6 gezeigt.

Nun sei  $\bar{u}$  ein Gleichgewicht von (2.1), d. h.

$$(2.9) \quad f(\bar{u}) = 0.$$

Zunächst betrachten wir das Verhalten stationärer Punkte unter Diskretisierung (noch nicht die Dynamik!).

**Satz 2.4.** Die Voraussetzungen seien wie in Folgerung 2.2,  $\bar{u}$  sei ein Gleichgewicht von Satz (2.1) und  $Df(\bar{u})$  sei invertierbar.

Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $\bar{u}$  und ein  $h > 0$  mit der Eigenschaft, dass  $\Phi_{\Delta t}$  für  $0 < |\Delta t| \leq h$  genau einen Fixpunkt  $u_{\Delta t} \in U$  besitzt, und es gilt

$$(2.10) \quad \|\bar{u} - u_{\Delta t}\| = O(\Delta t^p).$$

**Beweis:**  $u = \Phi_{\Delta t}(u) \Leftrightarrow V(u, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} (\Phi_{\Delta t}(u) - u) = 0$  für  $0 < |\Delta t| < h_0$ . Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$V(u, \Delta t) = \int_0^1 D_t \Phi_{s\Delta t}(u) ds.$$

Diese Darstellung lässt sich  $p + 1 = k - 1$  mal stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}^m \times (-h_0, h_0)$  fortsetzen.

Weil das Verfahren konsistent ist, gilt

$$(2.11) \quad V(u, 0) = f(u).$$

**Idee:** Wende bei  $(\bar{u}, 0)$  auf  $V$  den impliziten Funktionensatz an, um nach  $u$  aufzulösen.

Aus (2.11) folgt durch Differentiation

$$D_v V(\bar{u}, 0) = Df(\bar{u}) \in GL(\mathbb{R}^m).$$

Der Satz über implizite Funktionen ergibt:

Es gibt eine offene Umgebung  $U$  von  $\bar{u}$ ,  $h > 0$ ,  $u \in C^{k-1}((-h, h), U)$  mit

$$((v, \Delta t) \in U \times (-h, h), V(v, \Delta t) = 0) \Leftrightarrow (\Delta t \in (-h, h), v = u(\Delta t)).$$

Die Vektoren  $u(\Delta t)$ ,  $|\Delta t| < h$  sind die gesuchten Fixpunkte von  $\Phi_{\Delta t}$ .

Da  $D_v V(\cdot, \Delta t)$  gleichmäßig invers Lipschitz ist erhalten wir aus dem Konsistenzfehler für die konstante Lösung  $\bar{u}$

$$\|u(\Delta t) - \bar{u}\| \leq C \underbrace{\|V(u(\Delta t), \Delta t) - V(\bar{u}, \Delta t)\|}_{=0} = C\|\tau_{\Delta t}(0)\| = O(|\Delta t|^p).$$

■

**Bemerkung 2.5.** In Satz 2.4 wurde ausschließlich eine Annahme an die Konsistenz des numerischen Verfahrens gemacht, um Aussagen über die Fixpunkte des numerischen Verfahrens machen zu können. Für Runge-Kutta Verfahren ist der Fixpunkt  $\bar{u}$  unverändert. Beachte dazu

$$V(\bar{u}, \Delta t) = \sum_i \gamma_i k_i(\bar{u}, \Delta t),$$

wobei die  $k_i$  das System

$$k_i = f(\bar{u} + \Delta t \sum_j \beta_{ij} k_j) \quad \forall i,$$

lösen. Wegen  $f(\bar{u}) = 0$  sind die Lösungen  $k_i = 0$ , und somit gilt  $V(\bar{u}, \Delta t) = 0$ .

**Beispiel 2.6.** Betrachte das System

$$u' = u(1 - u) =: f(u),$$

welches den instabilen Fixpunkt 0 und den stabilen Fixpunkt 1 besitzt. Das RK-Verfahren zu dem Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

ist konsistent der Ordnung 2 und führt auf

$$\Phi_{\Delta t}(u) = u + \Delta t f(u + \frac{1}{2} \Delta t u(1 - u)) = u + \Delta t(u + \frac{1}{2} \Delta t u(1 - u))(1 - u - \frac{1}{2} \Delta t u(1 - u)).$$

Nun gilt:

$$u \text{ ist Fixpunkt von } \Phi_{\Delta t} \Leftrightarrow u(1 + \frac{1}{2} \Delta t(1 - u)) = 0 \text{ oder } (1 - u)(1 - \frac{1}{2} \Delta t u) = 0.$$

Also hat  $\Phi_{\Delta t}$  die vier Fixpunkte  $0, 1, \frac{2}{\Delta t}, 1 + \frac{2}{\Delta t}$ .

Das diskrete System besitzt also die beiden zusätzlichen Fixpunkte  $\frac{2}{\Delta t}$  und  $1 + \frac{2}{\Delta t}$ , die zu keinem der kontinuierlichen Fixpunkte in dem Sinne gehören, dass sie für  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen ihn konvergieren. Solche Fixpunkte heißen auch 'Phantom Lösungen' oder 'spurious solutions'.

Diese zusätzlichen Lösungen verlassen aber für  $\Delta t \rightarrow 0$  jede beschränkte Menge, wie wir gleich allgemein zeigen werden.

**Lemma 2.7.** *Die Voraussetzungen seien wie in Folgerung 2.2. Zusätzlich sei  $K \subset \mathbb{R}^m$  kompakt und  $f$  besitze keine Nullstellen in  $K$ .*

Dann gibt es  $h > 0$  mit

$$\Phi_{\Delta t}(u) \neq u \quad \forall u \in K, \quad 0 < |\Delta t| \leq h.$$

**Beweis:** Falls die Behauptung nicht gilt, so existieren Folgen  $\Delta t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \Delta t_n \neq 0$  und  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$  mit  $\Phi_{\Delta t_n}(u_n) = u_n$ , so dass  $V(u_n, \Delta t_n) = 0 \quad \forall n$ .

Ohne Einschränkung gelte  $u_n \rightarrow u \in K (n \in \mathbb{N})$  (sonst wähle eine konvergente Teilfolge). Dann folgt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varphi^{\Delta t_n}(u) - u}{\Delta t_n} \right\| &= \left\| \frac{\varphi^{\Delta t_n}(u) - u}{\Delta t_n} - V(u_n, \Delta t_n) \right\| \\ &\leq \underbrace{\left\| \frac{\varphi^{\Delta t_n}(u) - u}{\Delta t_n} - V(u, \Delta t_n) \right\|}_{\leq C|\Delta t_n|^p} + \underbrace{\|V(u, \Delta t_n) - V(u_n, \Delta t_n)\|}_{\leq C\|u_n - u\|}, \end{aligned}$$

wobei die Lipschitzbeschränktheit von  $V$  in  $K \times [-h, h]$  verwendet wurde. Daher ergibt sich

$$\|f(u)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\varphi^{\Delta t_n}(u) - u}{\Delta t_n} \right\| = 0, \quad \text{ein Widerspruch.}$$

■

**Folgerung 2.8.** *Die Voraussetzungen seien wie in Folgerung 2.2. Sei  $K \subset \mathbb{R}^m$  kompakt, alle Nullstellen von  $f$  in  $K$  seien regulär und liegen im Innern von  $K$ .*

Dann gibt es  $h > 0$ , so dass für alle  $0 < |\Delta t| \leq h$  gilt:

- (i)  $\#(K \cap f^{-1}(0)) = \# \{u \in K : \Phi_{\Delta t}(u) = u\}$
- (ii)  $\text{dist}_H(K \cap f^{-1}(0), \{u \in K : \Phi_{\Delta t}(u) = u\}) = O(|\Delta t|^p)$ , wobei  $\text{dist}_H$  den Hausdorff Abstand von Mengen bezeichnet.

**Beweis:** Aus der Kompaktheit von  $K$  und der Annahme, dass alle Nullstellen regulär sind, erhält man  $K \cap f^{-1}(0) = \{u_1, \dots, u_\ell\}$  ist eine endliche Menge. Mit Satz 2.4 folgt dann: Es existieren positive Konstanten  $h_1, \varepsilon$  und  $C$ , und zu jedem  $0 < |\Delta t| \leq h_1$  und  $j = 1, \dots, \ell$  gibt es genau ein  $u_j(\Delta t) \in K_\varepsilon(u_j)$  mit  $\Phi_{\Delta t}(u_j(\Delta t)) = u_j(\Delta t)$ . Diese erfüllen

$$(2.12) \quad \|u_j - u_j(\Delta t)\| \leq C|\Delta t|^p \quad \forall j = 1, \dots, \ell.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien  $h_1$  und  $\varepsilon$  so klein, dass  $K_\varepsilon(u_i) \cap K_\varepsilon(u_j) = \emptyset$  für  $i \neq j$  gilt. Wendet man auf  $\tilde{K} := K \setminus \bigcup_{j=1}^\ell K_\varepsilon(u_j)$  Lemma 2.7 an, erhält man ein  $h_2 > 0$ , so dass  $\Phi_{\Delta t}$  in  $\tilde{K}$  keine Fixpunkte für  $0 < |\Delta t| \leq h_2$  besitzt.

Mit  $h := \min(h_1, h_2)$  folgt (i), und (ii) ergibt sich aus (2.12). ■

## 2.2 Der asymptotische stabile Fall

In diesem Abschnitt soll unter den Voraussetzungen des Satzes von Liapunov, Kap. I, Satz 2.16, also

$$(LV) \quad f(\bar{u}) = 0 \text{ und } \operatorname{Re} \lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(Df(\bar{u}))$$

das Verhalten der numerischen Approximation in der Nähe von  $\bar{u}$  untersucht werden.

Da wir im Laufe der Untersuchungen Lösungen von (2.1) zu verschiedenen Anfangswerten vergleichen müssen, folgt zunächst ein Lemma, das im wesentlichen quantitative Abschätzungen der Variationsgleichung zu (2.1) zeigt.

**Lemma 2.9.** *Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  Lösungsoperator zu (2.1).*

*Dann gibt es zu  $h_0 > 0$  und  $R > 0$  ein  $C > 0$ , so dass für alle  $\|u\|, \|v\| \leq R$ ,  $0 \leq t \leq h_0$  gelten:*

$$(i) \quad \|\varphi^t(u) - u - \varphi^t(v) + v\| \leq Ct\|u - v\|,$$

$$(ii) \quad \|D_v \varphi^t(v) - D_v \varphi^t(0)\| \leq Ct \|v\|.$$

**Beweis:**  $Y = D_v \varphi^t(u)$  löst die Variationsgleichung

$$(2.13) \quad Y' = Df(\varphi^t(u))Y, \quad Y(0) = I.$$

Damit folgt aus dem Mittelwertsatz und (2.13)

$$\begin{aligned} \varphi^t(u) - u - \varphi^t(v) + v &= \int_0^1 (D_v \varphi^t(v + s(u - v)) - I) ds (u - v) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 Df(\varphi^{rt}(v + s(u - v))) D_v \varphi^{rt}(v + s(u - v)) dr ds t(u - v). \end{aligned}$$

Weil  $f$  und  $\varphi$  in  $C^1$  sind, ergibt sich hieraus die Abschätzung (i).

Setze

$$\delta(t, v) := D_v \varphi^t(v) - D_v \varphi^t(0).$$

Wegen (2.13) gilt:

$$D_t \delta(t, v) = Df(\underbrace{\varphi^t(0)}_{=0}) \delta(t, v) + (Df(\varphi^t(v)) - Df(\varphi^t(0))) D_v \varphi^t(v)$$

$$\delta(0, v) = 0.$$

Die Variation der Konstanten-Formel zeigt

$$\delta(t, v) = \int_0^t e^{(t-s)Df(0)} (Df(\varphi^s(v)) - Df(\varphi^s(0))) D_v \varphi^s(v) ds,$$

so dass man mit der lokalen Lipschitzbeschränktheit von  $Df$  und  $\varphi^s$  die behauptete Ungleichung

$$\|\delta(t, v)\| \leq C t \|v\|$$

erhält. ■

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes ist der folgende globale Konvergenzsatz.

**Satz 2.10.** *Seien die Voraussetzungen wie in Folgerung 2.2 und es gelte (LV).*

*Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $\bar{u}$  und  $h_0 > 0$ , so dass für alle Startwerte  $v \in U$  und alle Schrittweiten  $0 < \Delta t \leq h_0$  gelten*

- (i)  $\Phi_{\Delta t}^n(v) \in U \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{\Delta t}^n(v) = u_{\Delta t}$ , wobei  $u_{\Delta t}$  Fixpunkt von  $\Phi_{\Delta t}$  in  $U$  ist.
- (iii)  $\|\varphi^{n\Delta t}(v) - \Phi_{\Delta t}^n(v)\| \leq C \Delta t^p \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis: Schritt 0:** Es genügt  $\bar{u} = u_{\Delta t} = 0$  zu betrachten. Sonst betrachte

$$\tilde{\Phi}_{\Delta t}(v) = \Phi_{\Delta t}(v + u_{\Delta t}) - u_{\Delta t}, \quad \tilde{\varphi}^{\Delta t}(v) = \varphi^{\Delta t}(v + \bar{u}) - \bar{u}.$$

Nach Satz 2.4 und Lemma 2.9 gilt

$$\begin{aligned} & \|\Phi_{\Delta t}(v + u_{\Delta t}) - u_{\Delta t} - (\varphi^{\Delta t}(v + \bar{u}) - \bar{u})\| \\ & \leq \|\Phi_{\Delta t}(v + u_{\Delta t}) - \varphi^{\Delta t}(v + u_{\Delta t})\| + \|\varphi^{\Delta t}(v + u_{\Delta t}) - u_{\Delta t} - \varphi^{\Delta t}(v + \bar{u}) + \bar{u}\| \\ & \leq C \Delta t^{p+1} + C \Delta t \|u_{\Delta t} - \bar{u}\| = O(\Delta t^{p+1}), \end{aligned}$$

so dass auch  $\tilde{\Phi}$  und  $\tilde{\varphi}$  die Voraussetzungen von Folgerung 2.2 erfüllen.

Sei  $A := Df(0)$ .

**Schritt 1:** Zeige: Zu  $\alpha > 0$  mit

$$(2.14) \quad \operatorname{Re} \lambda + \alpha < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

existiert eine Norm  $\|\cdot\|_*$  im  $\mathbb{R}^m$  mit

$$(N1) \quad \|e^{sA}\|_* \leq e^{-s\alpha}, \quad \forall s \geq 0 \text{ und}$$

$$(N2) \quad \|e^{sA}\|_* \leq 1 - \frac{\alpha}{2}s, \quad \forall 0 \leq s \leq h_1, \quad h_1 \text{ klein genug.}$$

**Beweis:**  $\|e^{s\alpha} e^{sA}\| \leq C \quad \forall s \geq 0$  folgt aus (2.14). Daher gilt

$$\|v\| \leq \|v\|_* := \sup_{s \geq 0} \|e^{s\alpha} e^{sA} v\| \leq C \|v\|$$

und  $\|\cdot\|$  ist äquivalent zu  $\|\cdot\|_*$ .

Gleichung (N1) folgt aus

$$\|e^{tA}v\|_* = \sup_{s \geq 0} \|e^{s\alpha} e^{(s+t)A}v\| = e^{-t\alpha} \sup_{s \geq 0} \|e^{(s+t)\alpha} e^{(s+t)A}v\| \leq e^{-t\alpha} \|v\|_*.$$

Wegen  $e^{-s\alpha} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}s$  für  $0 \leq s \leq h_1$ ,  $h_1$  klein folgt auch (N2).

**Schritt 2:** Es gibt  $h_0, \epsilon, \beta > 0$  mit

$$(N3) \quad \|D_v \Phi_s(v)\|_* \leq 1 - \beta s \quad \forall 0 \leq s \leq h_0, \|v\| \leq \epsilon.$$

**Beweis:** Nach Folgerung 2.2 und Lemma 2.9 gilt

$$\begin{aligned} \|D_v \Phi_s(v)\|_* &\leq \|D_v \Phi_s(v) - D_v \varphi^s(v)\|_* + \|D_v \varphi^s(v) - D_v \varphi^s(0)\|_* + \|D_v \varphi^s(0)\|_* \\ &\leq C_1 s^{p+1} + C_2 s \|v\| + 1 - \frac{\alpha}{2}s \leq 1 - \frac{\alpha}{4}s =: 1 - \beta s, \end{aligned}$$

wenn man  $h_0$  und  $\epsilon$  hinreichend klein wählt.

**Schritt 3:** Beweis von (i) und (ii):

Sei  $K_\epsilon(0) := \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_* < \epsilon\}$ . Für  $\Delta t \leq h_0$  gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\|\Phi_{\Delta t}(v)\|_* = \|\Phi_{\Delta t}(v) - \Phi_{\Delta t}(0)\|_* \leq (1 - \beta \Delta t) \|v\|_* < \|v\|_* \Rightarrow (i).$$

Induktiv erhält man

$$\|\Phi_{\Delta t}^n(v)\|_* \leq (1 - \beta \Delta t)^n \|v\|_* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ also (ii).}$$

**Schritt 4:** Beweis von (iii):

Sei  $0 < \Delta t \leq h_0$ . Sei  $v \in K_{\epsilon_1}(0)$ ,  $\epsilon_1 \leq \epsilon$ , so dass  $\varphi^t(v) \in K_\epsilon(0) \quad \forall v \in K_{\epsilon_1}(0)$ .

$$e_n := \|\varphi^{n\Delta t}(v) - \Phi_{\Delta t}^n(v)\|_*, \quad e_0 = 0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \|\varphi^{(n+1)\Delta t}(v) - \Phi_{\Delta t}^{n+1}(v)\|_* \\ &\leq \|\varphi^{\Delta t}(\varphi^{n\Delta t}(v)) - \Phi_{\Delta t}(\varphi^{n\Delta t}(v))\|_* + \|\Phi_{\Delta t}(\varphi^{n\Delta t}(v)) - \Phi_{\Delta t}(\Phi_{\Delta t}^n(v))\|_* \\ &\leq (1 - \beta \Delta t)e_n + C \Delta t^{p+1}. \end{aligned}$$

Durch Induktion folgt

$$e_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \beta \Delta t)^i C \Delta t^{p+1} \leq C \Delta t^{p+1} \frac{1}{1 - (1 - \beta \Delta t)} = \frac{C}{\beta} \Delta t^p.$$

■

**Folgerung 2.11** (Numerik II, Kapitel 2.5). *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 2.10. Dann gibt es zu jedem  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  mit  $\varphi^t(u_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{u}$  Konstanten  $h_0 > 0$ ,  $C > 0$ , so dass für  $0 < \Delta t \leq h_0$  gilt*

- (i)  $\|\varphi^{n\Delta t}(u_0) - \Phi_{\Delta t}^n(u_0)\| \leq C\Delta t^p \quad \forall n \geq 0,$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{\Delta t}^n(u_0) = u_{\Delta t}.$

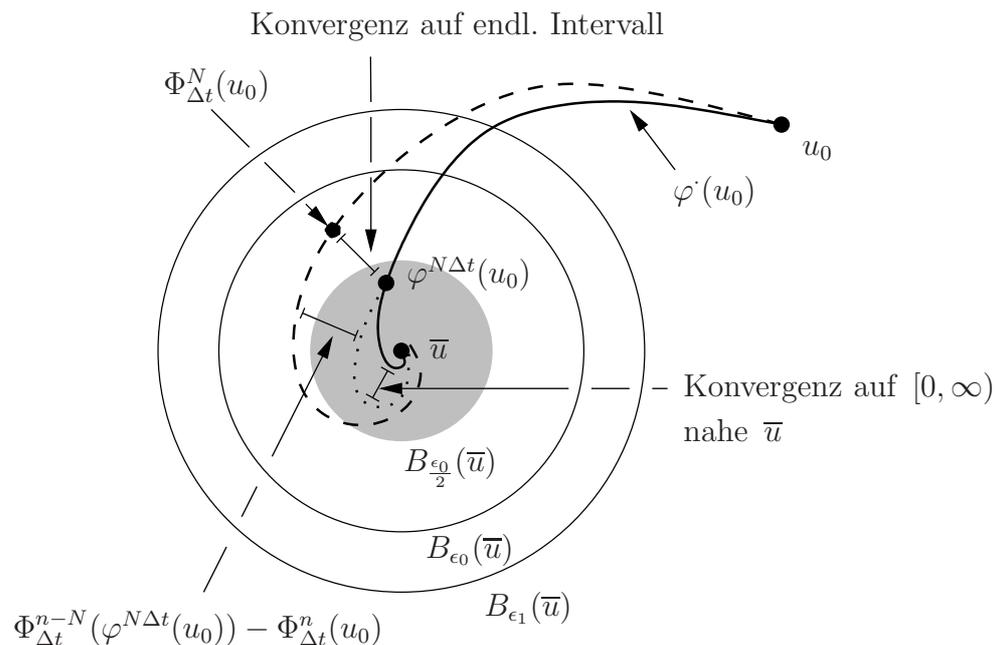


Abbildung 2.1: Idee des Konvergenzbeweises

**Beweis:** Wähle  $\epsilon_1 > 0$ , so dass Satz 2.10 für  $B_{\epsilon_1}(\bar{u}) = \{u : \|u - \bar{u}\| < \epsilon_1\}$  erfüllt ist. Wähle  $\epsilon_0 > 0$ , so dass  $\varphi^t(B_{\epsilon_0}(\bar{u})) \subset B_{\epsilon_1}(\bar{u}) \quad \forall t \geq 0$  (Stabilität!). Wähle schließlich  $T > 0$ , so dass  $\varphi^t(u_0) \in B_{\frac{\epsilon_0}{2}}(\bar{u}) \quad \forall t \geq \frac{T}{2}$ .

**Schritt 1:** Konvergenz auf endlichen Intervallen.

Nach Numerik II gibt es  $h_0 > 0$ ,  $C > 0$  mit

$$\|\varphi^{n\Delta t}(u_0) - \Phi_{\Delta t}^n(u_0)\| \leq C\Delta t^p \quad \forall 0 < \Delta t \leq h_0, \quad 0 \leq n\Delta t \leq T$$

und  $C h_0^p < \frac{\epsilon_0}{2}$ . Für  $\frac{T}{2} \leq N\Delta t \leq T < (N+1)\Delta t$  gilt dann

$$\Phi_{\Delta t}^N(u_0), \varphi^{N\Delta t}(u_0) \in B_{\epsilon_0}(\bar{u}).$$

**Schritt 2:** Konvergenz für  $n \geq N$ :

Für  $n \geq N$  gilt nach Satz 2.10

$$\begin{aligned} & \|\varphi^{n\Delta t}(u_0) - \Phi_{\Delta t}^n(u_0)\|_* \\ & \leq \|\varphi^{(n-N)\Delta t}(\varphi^{N\Delta t}(u_0)) - \Phi_{\Delta t}^{n-N}(\varphi^{N\Delta t}(u_0))\|_* + \|\Phi_{\Delta t}^{n-N}(\varphi^{N\Delta t}(u_0)) - \Phi_{\Delta t}^{n-N}(\Phi_{\Delta t}^N(u_0))\|_* \\ & \leq C\Delta t^p + \|\Phi_{\Delta t}^{n-N}(\varphi^{N\Delta t}(u_0)) - \Phi_{\Delta t}^{n-N}(\Phi_{\Delta t}^N(u_0))\|_*. \end{aligned}$$

Abschätzung des zweiten Summanden:

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\Delta t}^{n-N}(\varphi^{N\Delta t}(u_0)) - \Phi_{\Delta t}^{n-N}(\Phi_{\Delta t}^N(u_0))\|_* & \leq (1 - \beta\Delta t)^{n-N} \|\varphi^{N\Delta t}(u_0) - \Phi_{\Delta t}^N(u_0)\|_* \\ & \leq C\Delta t^p, \end{aligned}$$

damit haben wir die Behauptung gezeigt, und insbesondere folgt (i) durch Anwenden von Satz 2.10 (ii) auf  $\Phi_{\Delta t}^{n-N}(\Phi_{\Delta t}^N(u_0))$ . ■

## 2.3 Der Fall der Sattelpunkte

Wieder sei  $\bar{u}$  Fixpunkt von  $\dot{u} = f(u)$ .

Jetzt aber nehmen wir an

$$(2.15) \quad \sigma(Df(\bar{u})) \cap i\mathbb{R} = \emptyset.$$

$\bar{u}$  ist also ein hyperbolischer Fixpunkt.

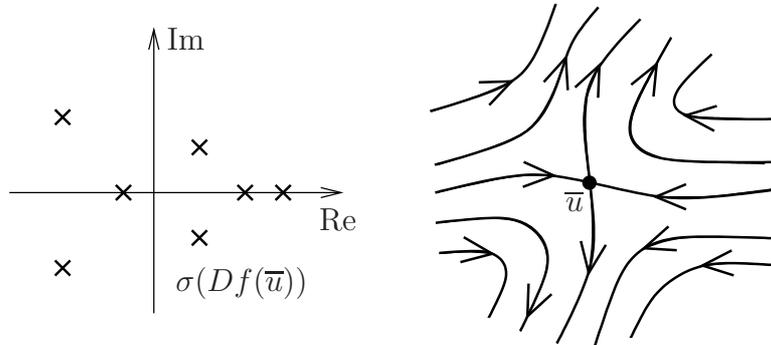


Abbildung 2.2: Spektrum und Phasenbild eines hyperbolischen Fixpunkts

Das Hauptergebnis wird sein:

**Satz 2.12.** Sei  $\bar{u}$  hyperbolischer Fixpunkt von  $\dot{u} = f(u)$ ,  $\varphi^t$  zugehöriger Fluss,  $\Phi_{\Delta t}(\cdot)$  glattes Einschrittverfahren der Konsistenzordnung  $p$ , insbesondere gelte die Voraussetzung (K) und es seien die Voraussetzungen von Folgerung 2.2 erfüllt.

Dann existieren Umgebungen  $U, V$  von  $\bar{u}$  und  $C, h_0 > 0$  mit

$$(i) \quad \forall u_0 \in U, \quad 0 < \Delta t \leq h_0 \quad \exists v_0 = v_0(\Delta t, u_0) \in V, \quad \text{so dass}$$

$$(2.16) \quad \sup_{\{n \geq 0: \varphi^t(u_0) \in U, 0 \leq t \leq n\Delta t\}} \|\varphi^{n\Delta t}(u_0) - \Phi_{\Delta t}^n(v_0)\| \leq C \Delta t^p$$

(ii)  $\forall v_0 \in U, 0 < \Delta t \leq h_0 \exists u_0 = u_0(\Delta t, v_0) \in V$ , so dass

$$(2.17) \quad \sup_{\{n: \Phi_{\Delta t}^k(v_0) \in U, 0 \leq k \leq n\}} \|\varphi^{n\Delta t}(u_0) - \Phi_{\Delta t}^n(v_0)\| \leq C \Delta t^p.$$

**Bemerkung.** 1. Die Bedeutung des Satzes ist nicht, dass das kontinuierliche und das diskrete Dynamische System sich für jeden Startwert gleich verhalten, sondern dass es zu jedem Startwert eines Systems einen Startwert des anderen gibt, so dass die beiden Orbits für alle (relevanten) Zeiten nahe beieinander sind.

2. Es gilt sogar (Garay 1993): Es gibt  $H_{\Delta t} : U \rightarrow V$  Homöomorphismus mit

(i)  $\|H_{\Delta t}(u) - u\| \leq C\Delta t^p \quad \forall u \in U, \Delta t \leq h_0$

(ii)  $H_{\Delta t} \circ \varphi^{\Delta t} = \Phi_{\Delta t} \circ H_{\Delta t}$  in  $U$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi^{\Delta t}} & \varphi^{\Delta t}(U) \\ \downarrow H_{\Delta t} & & \downarrow H_{\Delta t} \\ V & \xrightarrow{\Phi_{\Delta t}} & \Phi_{\Delta t}(V) \end{array}$$

3. Man nennt (vgl. I 3.2)

a)  $W_U^s = \{u_0 \in U : \varphi^t(u_0) \in U \quad \forall t \geq 0, \varphi^t(u_0) \rightarrow \bar{u} \text{ für } t \rightarrow \infty\}$  die lokal stabile Menge von  $\bar{u}$  bzgl.  $\varphi$  und

b)  $W_{U,\Delta t}^s = \{v_0 \in U : \Phi_{\Delta t}^n(v_0) \in U \quad \forall n \geq 0, \Phi_{\Delta t}^n(v_0) \rightarrow u(\Delta t) \text{ für } n \rightarrow \infty\}$  die lokal stabile Menge von  $u(\Delta t)$  bzgl.  $\Phi_{\Delta t}$ .

Für  $f \in C^k$  kann man zeigen, dass dieses  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten sind.

Der Satz 2.12 liefert dann insbesondere

$$d_H(W_U^s, W_{U,\Delta t}^s) = O(\Delta t^p).$$

Analoges gilt für die instabilen Mannigfaltigkeiten

$$W_U^u = \{u_0 \in U : \varphi^{-t}(u_0) \in U \quad \forall t \geq 0, \varphi^{-t}(u_0) \rightarrow \bar{u} \text{ für } t \rightarrow \infty\}$$

$$W_{U,\Delta t}^u = \{v_0 \in U : \Phi_{\Delta t}^{-n}(v_0) \in U \quad \forall n \geq 0, \Phi_{\Delta t}^{-n}(v_0) \rightarrow u(\Delta t) \text{ für } n \rightarrow \infty\}.$$

**Beweis von Satz 2.12:** O. B. d. A. sei  $\bar{u} = u(\Delta t) = 0$  (siehe Beweis von Satz 2.10).

Sei  $X_s \oplus X_u = \mathbb{R}^m$  die Zerlegung in invariante Unterräume von

$$Df(0) =: A = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix} : X_s \oplus X_u \rightarrow X_s \oplus X_u$$

(reelle Jordansche Normalform), wobei

$$\operatorname{Re} \lambda < -\alpha < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A_s),$$

$$\operatorname{Re} \lambda > \alpha > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A_u).$$

Dann gibt es Normen  $\|\cdot\|_s, \|\cdot\|_u$  auf  $X_s, X_u$  mit (vgl. (2.18))

$$\|e^{tA_s}\|_s \leq e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

$$\|e^{-tA_u}\|_u \leq e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Außerdem existieren  $h_1, \beta > 0$ , so dass für  $0 \leq \Delta t \leq h_1$  gilt (vgl. (N2))

$$(2.18) \quad \|I + \Delta t A_s\|_s = \|e^{\Delta t A_s} + O(\Delta t^2)\|_s \leq 1 - \beta \Delta t$$

und

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \|(I + \Delta t A_u)^{-1}\|_u &= \|(e^{\Delta t A_u} + O(\Delta t^2))^{-1}\|_u \\ &= \|e^{-\Delta t A_u} + O(\Delta t^2)\|_u \leq 1 - \beta \Delta t \end{aligned}$$

Mit  $[v]_s, [v]_u$  bezeichnen wir die Projektionen von  $v \in \mathbb{R}^m = X_s \oplus X_u$  auf  $X_s$  bzw.  $X_u$ .

**Beweis von Teil (i):**

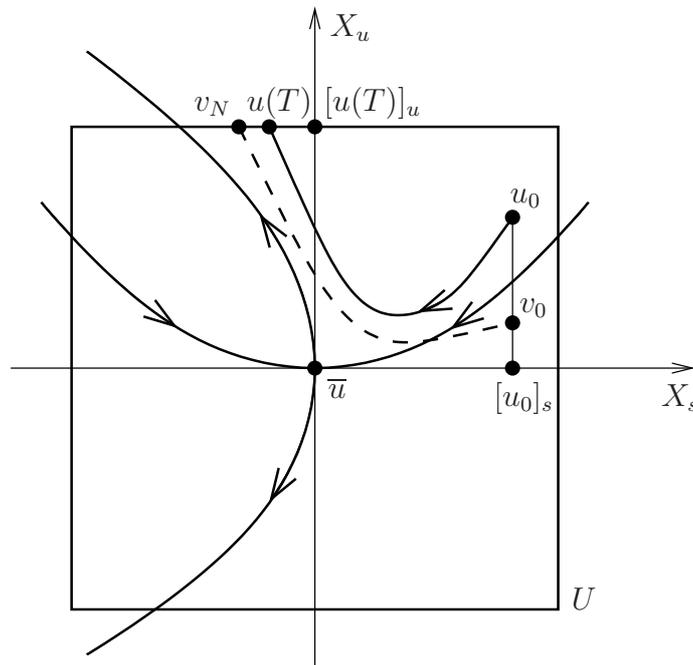


Abbildung 2.3: Endlicher Schattenorbit (gestrichelt)

**Idee des Beweises:** Finde Umgebung  $U$ , in der das RWP

$$\frac{1}{\Delta t} (v_{n+1} - \Phi_{\Delta t}(v_n)) = 0, \quad n \in \hat{J}, \quad [v_0]_s = [u(0)]_s$$

und, falls  $u(t)$  die Umgebung  $U$  bei  $t = T$  verlässt, auch

$$[v_N]_u = [u(T)]_u$$

eindeutig lösbar ist.

Die Nähe der Orbits wird aus  $(K)$  gefolgert werden.

Zuvor zwei Hilfsaussagen.

**Lemma 2.13.** (*Satz über Lipschitz Inverse von Funktionen*)

Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume,  $L \in L(X, Y)$  linearer Homöomorphismus,  $x_0 \in X$ .

Ferner gebe es Konstanten  $\delta, q_0, q_1 > 0$  und

$$F : K_\delta(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X \leq \delta\} \rightarrow Y \text{ mit}$$

$$(i) \quad \|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \leq q_0 \|x_1 - x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in K_\delta(x_0)$$

$$(ii) \quad q_0 < q_1 \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|_{Y \rightarrow X}}$$

$$(iii) \quad \|Lx_0 + F(x_0)\|_Y \leq \delta(q_1 - q_0).$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung  $\bar{x} \in K_\delta(x_0)$  von

$$(2.20) \quad (L + F)(x) = 0 \text{ in } K_\delta(x_0).$$

Außerdem gilt die Stabilitätsabschätzung

$$(2.21) \quad \|x_1 - x_2\|_X \leq \frac{1}{q_1 - q_0} \|(L + F)(x_1) - (L + F)(x_2)\|_Y \quad \forall x_1, x_2 \in K_\delta(x_0).$$

**Beweis:**  $Lx + F(x) = 0 \Leftrightarrow x = -L^{-1}F(x) =: T(x)$ . Wegen

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \|L^{-1}\| \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \underbrace{\frac{q_0}{q_1}}_{< 1} \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in K_\delta(x_0)$$

und

$$\begin{aligned} \|T(x) - x_0\| &\leq \|T(x) - T(x_0)\| + \|T(x_0) - x_0\| \\ &\leq \frac{q_0}{q_1} \|x - x_0\| + \|L^{-1}\| \|F(x_0) + Lx_0\| \\ &\leq \frac{q_0}{q_1} \delta + \frac{1}{q_1} \delta(q_1 - q_0) = \delta \quad \forall x \in K_\delta(x_0) \end{aligned}$$

ist  $T$  eine Kontraktion auf  $K_\delta(x_0)$ .

Der Kontraktionssatz liefert dann die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Die Abschätzung (2.21) folgt aus

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &\leq \|(I - T)x_1 - (I - T)x_2\| + \|Tx_1 - Tx_2\| \\ &\leq \|L^{-1}\| \|(L + F)x_1 - (L + F)x_2\| + \frac{q_0}{q_1} \|x_1 - x_2\| \\ &\Rightarrow \|x_1 - x_2\| \leq \frac{q_1}{q_1 - q_0} \frac{1}{q_1} \|(L + F)x_1 - (L + F)x_2\|. \end{aligned}$$

■

Bevor wir die zweite Hilfsaussage formulieren, führen wir einige Notationen und Annahmen ein.

$B \in \mathbb{R}^{m,m}$  sei invertierbare, hyperbolische Matrix,  $X_s \oplus X_u = \mathbb{R}^m$  Zerlegung in invariante Unterräume,  $\|\cdot\|_s$ ,  $\|\cdot\|_u$  Normen auf  $X_s$  bzw.  $X_u$  mit

$$B_s := B|_{X_s}, \|B_s\|_s \leq 1 - \beta, B_u := B|_{X_u}, \|B_u^{-1}\|_u \leq 1 - \beta \text{ für ein } \beta > 0.$$

Für  $v = [v]_s + [v]_u \in X_s \oplus X_u$  verwenden wir die Norm

$$\|v\| := \max(\|[v]_s\|_s, \|[v]_u\|_u).$$

Sei  $J = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  oder  $J = \mathbb{N}$ ,

$$\hat{J} = \{0, 1, 2, \dots, N - 1\} \text{ falls } |J| < \infty, \text{ sonst } \hat{J} = \mathbb{N}.$$

Schließlich benötigen wir noch die Banachräume

$$\ell_J^\infty := \{(v_n)_{n \in J} : \sup_{n \in J} \|v_n\| =: \|v_J\|_\infty < \infty\}.$$

**Lemma 2.14.** *Mit den Voraussetzungen wie oben gelten:*

Für  $J = \{0, 1, \dots, N\}$  ist für alle  $r_{\hat{J}} \in \ell_{\hat{J}}^\infty$ ,  $\eta_s \in X_s$ ,  $\eta_u \in X_u$  das Randwertproblem

$$u_{n+1} - Bu_n = r_n, n \in \hat{J}$$

$$[u_0]_s = \eta_s$$

$$[u_N]_u = \eta_u$$

in  $\ell_J^\infty$  eindeutig lösbar, und die Lösung  $u_J$  erfüllt

$$(2.22) \quad \|u_J\|_\infty \leq \max\{\|\eta_u\|_u, \|\eta_s\|_s\} + \frac{1}{\beta} \|r_{\hat{J}}\|_\infty.$$

**Beweis:** Eine Lösung  $u_J$  ist gegeben durch

$$u_n = [u_n]_s + [u_n]_u, n \in J$$

mit

$$[u_n]_s = \sum_{j=0}^{n-1} B^{n-1-j} [r_j]_s + B^n \eta_s, \quad n \in J,$$

$$[u_n]_u = - \sum_{j=1}^{N-n} B^{-j} [r_{j-1+n}]_u + B^{n-N} \eta_u, \quad n \in J,$$

denn

$$\begin{aligned} u_{n+1} - Bu_n &= [u_{n+1}]_s - B[u_n]_s + [u_{n+1}]_u - B[u_n]_u \\ &= \sum_{j=0}^n B^{n-j} [r_j]_s + B^{n+1} \eta_s - \sum_{j=0}^{n-1} B^{n-j} [r_j]_s - B^{n+1} \eta_s \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-n-1} B^{-j} [r_{j+n}]_u + B^{n+1-N} \eta_u + \sum_{j=1}^{N-n} B^{1-j} [r_{j-1+n}]_u - B^{n+1-N} \eta_u \\ &= [r_n]_s + [r_n]_u = r_n \end{aligned}$$

und

$$[u_0]_s = \eta_s$$

$$[u_N]_u = \eta_u.$$

Für (2.22) beachte:

$$\begin{aligned} \|[u_n]_s\|_s &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|B_s^{n-1-j}\|_s \|[r_j]_s\|_s + \|B_s^n\|_s \|\eta_s\|_s \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (1-\beta)^j \|r_J\|_{\infty} + \|\eta_s\|_s = \frac{1}{\beta} \|r_J\|_{\infty} + \|\eta_s\|_s \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|[u_n]_u\|_u &\leq \sum_{j=1}^{N-n} \|B_u^{-j}\|_u \|[r_{j-1+n}]_u\|_u + \|B_u^{n-N}\|_u \|\eta_u\|_u \\ &\leq \frac{1}{\beta} \|r_J\|_{\infty} + \|\eta_u\|_u \\ \Rightarrow \|u_J\|_{\infty} &= \sup_{n \in J} \max(\|[u_n]_s\|_s, \|[u_n]_u\|_u) \leq \frac{1}{\beta} \|r_J\|_{\infty} + \max(\|\eta_s\|_s, \|\eta_u\|_u). \end{aligned}$$

Zum Beweis der Injektivität genügt es zeigen:

$$r_J, \eta_s, \eta_u = 0 \Rightarrow u_J = 0.$$

Aus  $u_{n+1} = Bu_n$  folgt

$$[u_{n+1}]_s = B_s [u_n]_s = B_s^{n+1} [u_0]_s = 0 \quad \forall n \in \hat{J}.$$

Ebenso

$$u_n = B^{-1}u_{n+1},$$

also

$$[u_n]_u = B_u^{-1}[u_{n+1}]_u = B_u^{n-N}[u_N]_u = 0 \quad \forall n \in \widehat{J}.$$

■

**Zusatz:** Im Fall  $J = \mathbb{N}$  muss man in diesem Beweis lediglich die folgenden Modifikationen vornehmen. Die Bedingung  $[u_N]_u = \eta_u$  entfällt und ebenso  $\eta_u$  in (2.22). Man erhält jetzt

$$[u_n]_u = \sum_{j=1}^{\infty} B^{-j}[r_{j-1+n}]_u, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei die Reihe absolut konvergiert und die folgende Abschätzung gilt:

$$\|[u_n]_u\|_u \leq \frac{1}{\beta} \|r_J\|_{\infty}.$$

Beim Nachweis der Injektivität folgt für jedes  $n_0 \in \widehat{J}$  aus

$$\begin{aligned} \|[u_{n_0}]_u\|_u &= \|B_u^{-m}[u_{n_0+m}]_u\| \leq \|B_u^{-m}\|_u \|[u_{n_0+m}]_u\|_u \\ &\leq (1 - \beta)^m \|u_J\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

die Behauptung  $[u_{n_0}]_u = 0$ .

Wir setzen den Beweis von Satz 2.12 fort. Dazu definieren wir

$$(2.23) \quad X_J := \ell_J^{\infty}, \quad Y_J := \ell_{\widehat{J}}^{\infty} \times X_s \times X_u$$

$$\|(r_{\widehat{J}}, \eta_s, \eta_u)\|_Y = \|r_{\widehat{J}}\|_{\infty} + \max(\|\eta_s\|_s, \|\eta_u\|_u)$$

wie in Lemma 2.14. Wir lassen  $J$  endlich und unendlich zu, wobei im Fall  $J = \mathbb{N}$  jeweils die  $\eta_u$ -Terme entfallen.

Sei

$$G_J : \begin{array}{l} X_J \rightarrow Y_J \\ v_J \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} (v_{n+1} - \Phi_{\Delta t}(v_n)), \quad n \in \widehat{J} \\ [v_0]_s - \eta_s \\ [v_N]_u - \eta_u \end{pmatrix}. \end{array}$$

Schreibe

$$(2.24) \quad \begin{aligned} G_J &= L_J + F_J \\ L_J(v_J) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} (v_{n+1} - (I + \Delta t A)v_n), \quad n \in \widehat{J} \\ [v_0]_s \\ [v_N]_u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$F_J(v_J) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} ((I + \Delta t A)v_n - \Phi_{\Delta t}(v_n)), \quad n \in \widehat{J} \\ -\eta_s \\ -\eta_u \end{pmatrix}.$$

Auf  $L_J$  ist Lemma 2.14 anwendbar (mit  $\Delta t\beta$  anstelle  $\beta$  und  $\Delta tr_n$  anstelle  $r_n$ ) und zeigt  $L_J : X_J \rightarrow Y_J$  ist linearer Homöomorphismus. Wegen (2.22) gilt:

$$\|L_J^{-1}\|_{Y_J \rightarrow X_J} \leq \max\left(1, \frac{1}{\beta}\right),$$

wobei die Konstante unabhängig von  $J$  ist.

Setze

$$(2.25) \quad q_1 := \min\left(1, \beta\right) \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|_{Y \rightarrow X}}.$$

Sei  $K_\delta(0) := \{v_J \in X : \|v_J\|_\infty \leq \delta\}$ .

Für  $v_J, w_J \in K_\delta(0)$  folgt mit Lemma 2.9 und Folgerung 2.2

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \|F_J(v_J) - F_J(w_J)\|_Y &= \sup_{n \in \hat{J}} \left\| \frac{1}{\Delta t} \underbrace{\left( (I + \Delta t A) (v_n - w_n) - (\Phi_{\Delta t}(v_n) - \Phi_{\Delta t}(w_n)) \right)}_{=D\varphi^{\Delta t}(0)+O(\Delta t^2)} \right\| \\ &\leq C_0 \Delta t \|v_J - w_J\|_\infty + \frac{1}{\Delta t} \sup_{n \in \hat{J}} \left\| \int_0^1 D\varphi^{\Delta t}(0) - D\Phi_{\Delta t}(w_n + s(v_n - w_n)) ds (v_n - w_n) \right\| \\ &\leq C_0 \Delta t \|v_J - w_J\|_\infty + \frac{1}{\Delta t} \sup_{n \in \hat{J}} \left( \underbrace{\int_0^1 \|D\varphi^{\Delta t}(0) - D\varphi^{\Delta t}(w_n + s(v_n - w_n))\|}_{\leq C_1 \delta \Delta t} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\|D\varphi^{\Delta t}(w_n + s(v_n - w_n)) - D\Phi_{\Delta t}(w_n + s(v_n - w_n))\|}_{\leq C_2 \Delta t^{p+1}} ds \|v_n - w_n\| \right) \\ &\leq (C_0 \Delta t + C_1 \delta + C_2 \Delta t^p) \|v_J - w_J\|_\infty \\ &\leq q_0 \|v_J - w_J\|_\infty \quad \forall 0 < \Delta t \leq h_1, \text{ wobei } h_1, \delta \leq \delta_1 \text{ und } q_0 := \frac{q_1}{2}. \end{aligned}$$

Ferner gilt, falls  $\max(\|\eta_s\|_s, \|\eta_u\|_u) \leq \delta \frac{q_1}{2} =: \delta_0$ , die Abschätzung

$$(2.27) \quad \|G_J(0)\|_Y = \|(0, -\eta_s, -\eta_u)\|_Y \leq \delta \frac{q_1}{2} = \delta(q_1 - q_0).$$

Nach Lemma 2.13 gibt es also eine eindeutige Lösung  $v_J$  von  $G_J(v_J) = 0$  in  $K_\delta(0)$ .

Für  $w_J \in K_\delta(0)$  gilt dann

$$(2.28) \quad \|v_J - w_J\|_X \leq \frac{2}{q_1} \|G_J(v_J) - G_J(w_J)\|_Y = \frac{2}{q_1} \|G_J(w_J)\|_Y.$$

Sei jetzt  $u_0 \in \overset{\circ}{K}_{\delta_0}(0)$ ,  $T := \inf\{t > 0 : \varphi^t(u_0) \notin K_{\delta_0}(0)\} > 0$ .

**1. Fall:**  $T < \infty$ .

Setze  $\eta_s := [u(0)]_s$ ,  $\eta_u := [u(T)]_u$ .

Zu  $\Delta t \leq h_1$  wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N\Delta t \leq T < (N+1)\Delta t$  und setze  $J = \{0, 1, \dots, N\}$ . Dann gibt es eine eindeutige Lösung  $v_J \in K_\delta(0)$  von

$$G_J(v_J) = 0.$$

Setze  $u_J := (u_n)_{n \in J}$ ,  $u_n := \varphi^{n\Delta t}(u_0) \in K_\delta(0)$ .

Aus (2.28) und der Konsistenzbedingung (K) folgt

$$\sup_{n \in J} \|u_n - v_n\| \leq \frac{2}{q_1} \|G(u_J)\|_Y = \frac{2}{q_1} \sup_{n \in J} \left\| \frac{1}{\Delta t} (\varphi^{\Delta t}(u_n) - \Phi_{\Delta t}(u_n)) \right\| \leq C\Delta t^p,$$

**2. Fall:**  $T = \infty$ .

Setze  $\eta_s = [u(0)]_s$ ,  $J = \mathbb{N}$ .

Wie oben gibt es eine eindeutige Lösung  $v_{\mathbb{N}} \in K_\delta(0)$  von

$$G(v_{\mathbb{N}}) = 0.$$

Mit  $u_{\mathbb{N}} := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $u_n := \varphi^{n\Delta t}(u_0) \in K_\delta(0)$  folgt ebenso

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n - v_n\| \leq C\Delta t^p.$$

Dieses beendet den Beweis von Teil (i).

**Bemerkung 2.15.** In dem 2. Fall des Beweises erhält man mit der Abbildung  $\Pi : v_{\mathbb{N}} \rightarrow v_0$  (Projektion der Folge  $v_{\mathbb{N}}$  auf ihr erstes Folgenglied) aus

$$v_s \rightarrow \Pi \circ G^{-1}(0_{\mathbb{N}}, v_s)$$

eine Parametrisierung der stabilen Mannigfaltigkeit des diskreten Dynamischen Systems als Graph über dem stabilen Unterraum.

**Beweis von Teil (ii):** Jetzt werden im Wesentlichen die Rollen von  $\varphi^{\Delta t}$  und  $\Phi_{\Delta t}$  vertauscht. Seien  $X, Y$  wie oben in (2.23) gewählt und

$$\begin{aligned} X &\rightarrow Y \\ \tilde{G} : u_J &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t}(u_{n+1} - \varphi^{\Delta t}(u_n)), n \in \hat{J} \\ [u_0]_s - \eta_s \\ [u_N]_u - \eta_u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zerlege

$$\tilde{G} = L + \tilde{F}$$

mit  $L$  wie in (2.24) und

$$\tilde{F}(u_J) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} ((I + \Delta t A)u_n - \varphi^{\Delta t}(u_n)), n \in \hat{J} \\ -\eta_s \\ -\eta_u \end{pmatrix}.$$

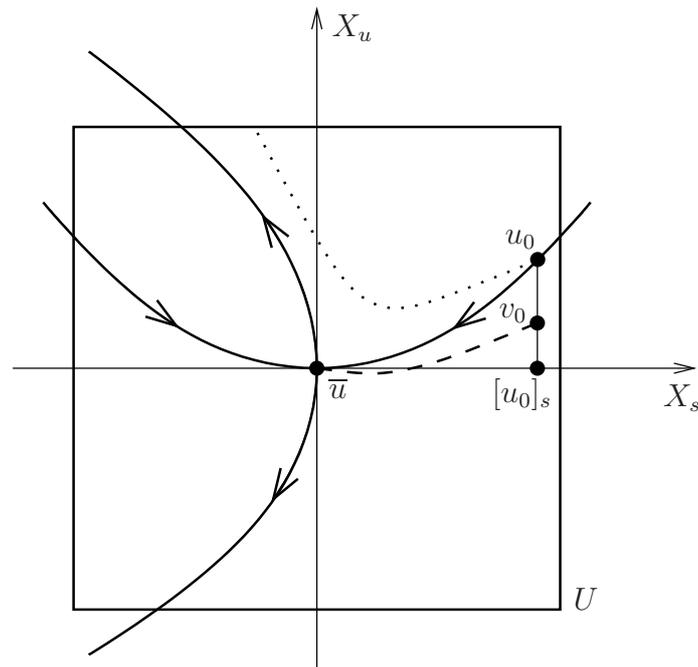


Abbildung 2.4: Unendlicher Schattenorbit (gestrichelt) und numerischer Orbit mit dem Startwert  $u_0$  (punktiert)

Für  $\delta \leq \delta_1$ ,  $0 < \Delta t \leq h_1$  folgt für  $u_J, w_J \in K_\delta(0)$  genau wie in (2.26)

$$(2.29) \quad \|\tilde{F}(u_J) - \tilde{F}(w_J)\|_Y \leq (C_0 \Delta t + C_1 \delta) \|u_J - w_J\|_\infty \leq q_0 \|u_J - w_J\|_\infty,$$

ebenso gilt für  $\max(\|\eta_s\|_s, (\|\eta_u\|_u)) \leq \delta_0$  das Analogon zu (2.27)

$$(2.30) \quad \|\tilde{G}(0)\|_Y \leq \delta(q_1 - q_0).$$

Und es folgt aus Lemma 2.13 die eindeutige Lösbarkeit von

$$\tilde{G}(u_J) = 0$$

in  $K_\delta(0)$ , sowie die analoge Stabilitätsungleichung zu (2.28):

$$(2.31) \quad \|u_J - w_J\|_X \leq \frac{2}{q_1} \|\tilde{G}(u_J) - \tilde{G}(w_J)\| = \frac{2}{q_1} \|\tilde{G}(w_J)\|.$$

Sei  $u_0$  das erste Element der Folge  $u_J = (u_n)_{n \in J}$ .

Setze  $u(t) = \varphi^t(u_0)$ . Nach der Konstruktion von  $\tilde{G}$  ist klar, dass gilt

$$u(n\Delta t) = \varphi^{n\Delta t}(u_0) = u_n, \quad \forall n \in J.$$

Es sei jetzt  $\Delta t \leq h_1$ .

Nun sei  $v_0 \in \overset{\circ}{K}_{\delta_0}(0)$  und  $N := \min \{n > 0 : \Phi_{\Delta t}^{n+1}(v_0) \notin \overset{\circ}{K}_{\delta_0}(0)\} \geq 0$ .

**1. Fall:**  $N < \infty$

Setze  $\eta_s := [v_0]_s$ ,  $\eta_u := [v_N]_u$ .

Dazu gibt es eine eindeutige Lösung  $u_J \in K_\delta(0)$  von

$$\tilde{G}(u_J) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t}(u_{n+1} - \varphi^{\Delta t}(u_n)), n \in J \\ [u_0]_s - \eta_s \\ [u_N]_u - \eta_u \end{pmatrix} = 0.$$

(2.31) liefert dann

$$\begin{aligned} & \sup_{\{n: \Phi_{\Delta t}^k(v_0) \in \dot{K}_{\delta_0}(0), 0 \leq k \leq n\}} \|u_n - \Phi_{\Delta t}^n(v_0)\| \\ & \leq \frac{2}{q_1} \|\tilde{G}(v_J)\|_Y = \frac{2}{q_1} \sup_{n \in J} \left\| \frac{1}{\Delta t} (\Phi_{\Delta t}(v_n) - \varphi^{\Delta t}(v_n)) \right\| \leq C \Delta t^p. \end{aligned}$$

**2. Fall:**  $N = \infty$ .

Setze  $\eta_s := [v_0]_s$ , und es gibt eine eindeutige Lösung von  $\tilde{G}(u_N) = 0$ .

(2.31) ergibt genau wie im 1. Fall die Behauptung (2.17).

Dieses beendet den Beweis von Teil (ii). ■

### Bemerkungen:

1. In den beiden 2. Fällen des Beweises erhält man mit der Projektion auf das erste Folgenglied

$$\Pi : v_{\mathbb{N}} \rightarrow v_0$$

mit den Abbildungen

$$X_s \ni v_s \rightarrow \Pi \circ G^{-1}(0_{\mathbb{N}}, v_s) = v_0$$

bzw.

$$X_s \ni v_s \rightarrow \Pi \circ \tilde{G}^{-1}(0_{\mathbb{N}}, v_s) = v_0$$

eine Parametrisierung der stabilen Mannigfaltigkeit des diskreten (bzw. kontinuierlichen) dynamischen Systems als Graph über dem stabilen Unterraum.

Aus dem obigen Beweis folgt dann, dass diese Mannigfaltigkeiten einen Abstand der Größenordnung  $O(\Delta t^p)$  haben.

2. Um die Approximation für den instabilen Unterraum zu zeigen, wendet man Satz 2.12 auf das zeitumgekehrte System

$$\dot{u} = -f(u)$$

an.

### 3 Die Approximation von Attraktoren

Wir betrachten das von  $\dot{u} = f(u)$  erzeugte dynamische System  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_+, \{\varphi^t\}_{t \geq 0})$  und ein konsistentes Einschrittverfahren der Ordnung  $p$  (also gilt wieder (K)) mit zugehörigem diskreten DS  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{N}, \{\Phi_{\Delta t}^n\}_{n \in \mathbb{N}})$ . Außerdem sei  $f$  genügend glatt.

In Kapitel I, Satz 2.25 wurde gezeigt, dass unter den Voraussetzungen

$$(3.1) \quad \exists U \subset \mathbb{R}^m \text{ offen und beschränkt mit } \varphi^t(\bar{U}) \subset U \quad \forall t > 0,$$

( $U$  beschränkt  $\Rightarrow \varphi^t(U), t \geq 0$  ist beschränkt, also relativ kompakt) das kontinuierliche DS die Menge

$$(3.2) \quad M = \omega(U) = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(U) = \{u \in \mathbb{R}^m : \exists t_k \rightarrow \infty, u_k \in U \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{t_k}(u_k) = u\}$$

als einen Attraktor besitzt, der  $U$  anzieht.

Das heißt

$$(3.3) \quad \forall \epsilon > 0 \exists t^* = t^*(\epsilon) \text{ mit } \text{dist}(\varphi^t(U), \omega(U)) \leq \epsilon \quad \forall t \geq t^*.$$

Es soll jetzt untersucht werden, ob auch das Einschrittverfahren einen Attraktor  $M_{\Delta t}$  besitzt und wie  $M$  und  $M_{\Delta t}$  zusammenhängen.

#### 3.1 Existenz positiv invarianter Mengen

Der Kern des Beweises von Kap. I Satz 2.25 sind Kompaktheitsargumente, die auf der positiven Invarianz der Menge  $U$  beruhen.

Da wir ähnliche Argumente für die Existenz eines diskreten Attraktors benutzen werden, ist im ersten Schritt zu zeigen, dass es eine positiv invariante Umgebung von  $U$  für  $\Phi_{\Delta t}$  überhaupt gibt.

**Satz 3.1.** *Unter obigen Voraussetzungen gilt:*

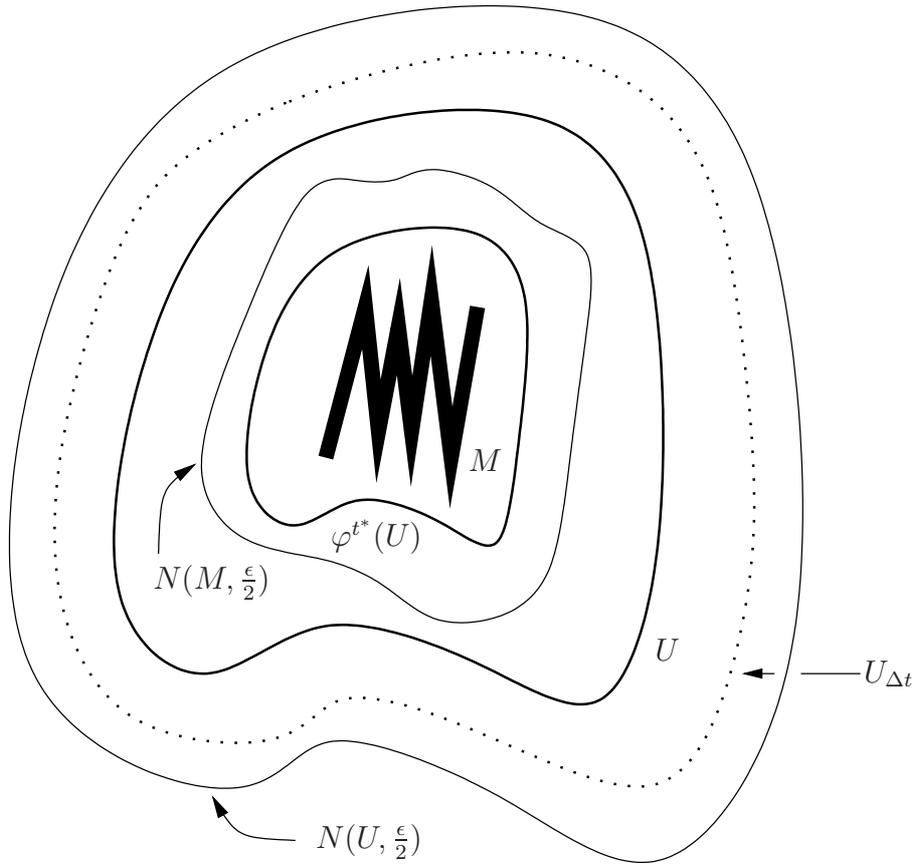
*Es gibt ein  $\epsilon_0 > 0$ , so dass man für jedes  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  ein  $h_0 = h_0(\epsilon) > 0$  findet und für alle  $0 < \Delta t \leq h_0$  ein  $n_0 = n_0(\Delta t) \in \mathbb{N}$  mit den folgenden Eigenschaften*

$$(3.4) \quad U_{\Delta t} := \bigcup_{n < n_0} \Phi_{\Delta t}^n(U)$$

*ist positiv invariant unter  $\Phi_{\Delta t}$  und*

$$(3.5) \quad \text{dist}(u, M) \leq 2\epsilon \Rightarrow u \in U,$$

$$(3.6) \quad \text{dist}(u, U) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall u \in U_{\Delta t}.$$

Abbildung 3.1: Konstruktion einer positiv invarianten Menge  $U_{\Delta t}$ 

**Beweis:** Weil  $M \subset U$  kompakt ist, existiert  $\epsilon_0 > 0$  mit

$$(3.7) \quad N(M, 2\epsilon) := \{u : \text{dist}(u, M) \leq 2\epsilon\} \subset U \quad \forall \epsilon < \epsilon_0.$$

Damit ist (3.5) gezeigt. Wegen (3.3) gibt es  $t^* > 0$  mit

$$(3.8) \quad \varphi^t(U) \subset N(M, \frac{\epsilon}{2}) \quad \forall t \geq t^*.$$

Setze  $T := 3t^*$ ,  $K := \overline{N(U, \epsilon)}$  kompakt.

Wegen der Voraussetzung (K) konvergiert das Verfahren gleichmäßig für alle  $u \in \bar{U}$  auf dem Intervall  $[0, T]$ , das heißt zu  $\epsilon > 0 \exists h_0 > 0$  mit

$$(3.9) \quad \|\Phi_{\Delta t}^n(u) - \varphi^{n\Delta t}(u)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall 0 < \Delta t \leq h_0, n\Delta t \leq T, u \in \bar{U}.$$

Zu  $0 < \Delta t \leq h_0$  wähle  $n_0$  mit

$$(3.10) \quad (n_0 - 1)\Delta t \leq t^* < n_0\Delta t$$

und setze

$$U_{\Delta t} := \bigcup_{n < n_0} \Phi_{\Delta t}^n(U).$$

Wegen (3.9) folgt (3.6) aus (3.1), denn

$$v \in U_{\Delta t} \Rightarrow \exists u \in U, 0 \leq k < n_0 \text{ mit } v = \Phi_{\Delta t}^k(u)$$

und daher

$$\text{dist}(v, U) \leq \|\Phi_{\Delta t}^k(u) - \underbrace{\varphi^{k\Delta t}(u)}_{\in U}\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Die positive Invarianz von  $U_{\Delta t}$  folgt indirekt:

Angenommen  $\exists v \in U_{\Delta t}$  mit  $\Phi_{\Delta t}(v) \notin U_{\Delta t} \Rightarrow \exists u \in U, 0 \leq k < n_0$  mit  $v = \Phi_{\Delta t}^k(u)$ . Wegen  $\Phi_{\Delta t}^{k+1}(u) = \Phi_{\Delta t}(v) \notin U_{\Delta t}$  folgt  $k = n_0 - 1$ .

Es gilt aber wegen (3.8), (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} \text{dist}(\Phi_{\Delta t}(v), M) &= \text{dist}(\Phi_{\Delta t}^{n_0}(u), M) \\ &\leq \|\Phi_{\Delta t}^{n_0}(u) - \varphi^{n_0\Delta t}(u)\| + \text{dist}(\varphi^{n_0\Delta t}(u), M) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Mit (3.5) folgt  $\Phi_{\Delta t}(v) \in U \subset U_{\Delta t}$ , ein Widerspruch. ■

Die nachgewiesene positive Invarianz motiviert nun, dass  $\omega_{\Delta t}(U_{\Delta t})$  ein Attraktor für  $\Phi_{\Delta t}$  ist, der  $U_{\Delta t}$  anzieht. Dieses wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

## 3.2 Oberhalbstetigkeit von Attraktoren

**Satz 3.2.** *Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.1 gibt es  $h_0 > 0$ , so dass für  $\Delta t < h_0$*

$$(3.11) \quad M_{\Delta t} := \omega_{\Delta t}(U) \subset U$$

*ein Attraktor von  $\Phi_{\Delta t}(\cdot)$  ist, der  $U$  anzieht. Außerdem gilt:*

$$(3.12) \quad \text{dist}(M_{\Delta t}, M) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

**Beweis:** Seien  $\epsilon, T, h_0, \Delta t$  und  $n_0(\Delta t)$  wie im Beweis von Satz 3.1. Es gilt:

$$N(M, 2\epsilon) \subset U \subset U_{\Delta t} \subset N(U, \frac{\epsilon}{2}) \quad \forall 0 < \Delta t < h_0.$$

**1. Schritt:**  $N(M, \epsilon)$  absorbiert  $U_{\Delta t}$  unter  $\Phi_{\Delta t}$ .

Wegen (3.8) gilt für alle  $u \in U$

$$(3.13) \quad \text{dist}(\varphi^{n\Delta t}(u), M) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n\Delta t \geq t^*.$$

Sei  $v \in U_{\Delta t}$ ,  $t^* \leq n\Delta t < 2t^*$ , dann  $\exists u \in U$ ,  $0 \leq k < n_0$  mit

$$\begin{aligned} v &= \Phi_{\Delta t}^k(u) \text{ und es folgt aus (3.9) (mit } T = 3t^*) \text{ und (3.13)} \\ \text{dist}(\Phi_{\Delta t}^n(v), M) &= \text{dist}(\Phi_{\Delta t}^{n+k}(u), M) \\ &\leq \|\Phi_{\Delta t}^{n+k}(u) - \varphi^{(n+k)\Delta t}(u)\| + \text{dist}(\varphi^{(n+k)\Delta t}(u), M) \\ &\leq \epsilon, \text{ da } t^* \leq (n+k)\Delta t < 3t^*. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\text{dist}(\Phi_{\Delta t}^n(U_{\Delta t}), M) \leq \epsilon \quad \forall t^* \leq n\Delta t < 2t^*.$$

Für  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N\Delta t \geq t^*$  beliebig, wähle  $n$  mit  $t^* \leq n\Delta t < 2t^*$  und  $N - n \geq 0$ .

Es folgt

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \text{dist}(\Phi_{\Delta t}^N(U_{\Delta t}), M) &= \text{dist}(\Phi_{\Delta t}^n(\underbrace{\Phi_{\Delta t}^{N-n}(U_{\Delta t})}_{\subset U_{\Delta t} \text{ nach Satz 3.1}}), M) \\ &\leq \text{dist}(\Phi_{\Delta t}^n(U_{\Delta t}), M) \leq \epsilon \end{aligned}$$

aus der positiven Invarianz von  $U_{\Delta t}$ .

**2. Schritt:**  $\omega_{\Delta t}(U_{\Delta t}) = \omega_{\Delta t}(U)$ .

Mit der im Beweis von Kap. I Satz 2.25 gezeigten Identität (2.13)

$$\omega_{\Delta t}(U) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} \Phi_{\Delta t}^m(U)} \text{ folgt wegen } F(A \cup B) = F(A) \cup F(B) \text{ die Gleichheit}$$

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \omega_{\Delta t}(U_{\Delta t}) &= \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} \Phi_{\Delta t}^m(U_{\Delta t})} = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} \bigcup_{0 \leq k < n_0} \Phi_{\Delta t}^m(\Phi_{\Delta t}^k(U))} \\ &= \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{0 \leq k < n_0} \bigcup_{m \geq n} \Phi_{\Delta t}^{m+k}(U)} = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} \Phi_{\Delta t}^m(U)} = \omega_{\Delta t}(U). \end{aligned}$$

**3. Schritt:**  $\omega_{\Delta t}(U)$  ist ein Attraktor, der  $U$  anzieht.

Aus Schritt 1 folgt:

$$\omega_{\Delta t}(U) \subset N(M, \epsilon) \subset U,$$

also ist  $\omega_{\Delta t}(U)$  beschränkt und wegen (3.15) auch abgeschlossen, also kompakt.

Mit denselben Schlüssen wie im Beweis von Kap. I Satz 2.25 folgt, dass  $M_{\Delta t} = \omega_{\Delta t}(U)$  invariant unter  $\Phi_{\Delta t}$  ist und  $U_{\Delta t}$  anzieht. Hieraus ergibt sich schließlich, dass  $M_{\Delta t}$  ein Attraktor ist, der auch  $U$  anzieht.

**4. Schritt:** Die Oberhalbstetigkeit (3.12) folgt, indem man  $\Delta t < h_0(\epsilon)$  wählt, denn dann gilt nach Schritt 1

$$M_{\Delta t} \subset N(M, \epsilon), \text{ also } \text{dist}(M_{\Delta t}, M) \leq \epsilon.$$

Da  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  beliebig war, folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung.** 1. Die Annahme  $\varphi^t(\bar{U}) \subset U$  aus Kap. I Satz 2.25 wurde dort im Beweis benutzt, um relative Kompaktheit von  $\omega(U)$  zu erhalten.

Hier war dies nicht nötig, da wir im endlich-dimensionalen Fall mit beschränkten Mengen ( $\Rightarrow$  relativ kompakt) diese Voraussetzung automatisch erhalten. Dafür wurde die positive Invarianz von  $U_{\Delta t}$  benutzt.

2. Wir haben nur

$$\text{dist}(M_{\Delta t}, M) \rightarrow 0 \quad \text{für } \Delta t \rightarrow 0 \quad \text{''Oberhalbstetigkeit''}$$

gezeigt.

Die Unterhalbstetigkeit

$$\text{dist}(M, M_{\Delta t}) \rightarrow 0 \quad \text{für } \Delta t \rightarrow 0 \quad \text{ist im Allgemeinen falsch.}$$

**Beispiel 3.3.** (*Kollabieren des numerischen Attraktors*)

Betrachte das DS erzeugt von (in Polarkoordinaten)

$$\dot{r} = -g(r)r(r-1)^2, \quad g(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < 1 \\ 1, & 1 \leq r \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = 1$$

In kartesischen Koordinaten  $u_1 = r \cos \varphi$ ,  $u_2 = r \sin \varphi$  gilt

$$\dot{u}_1 = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi = -g(r)(r-1)^2 u_1 - u_2$$

$$\dot{u}_2 = -g(r)(r-1)^2 u_2 + u_1, \quad r^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Diskretisierung mit dem impliziten Euler liefert  $u = \Phi_{\Delta t}(v)$ , d.h. ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \Delta t \begin{pmatrix} -g(r)(r-1)^2 u_1 - u_2 \\ u_1 - g(r)(r-1)^2 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Für die Quadratnorm erhält man

$$\begin{aligned} v_1^2 + v_2^2 &= u_1^2 + \Delta t^2 g(r)^2 (r-1)^4 u_1^2 + \Delta t^2 u_2^2 + 2\Delta t g(r)(r-1)^2 u_1^2 + 2\Delta t u_1 u_2 \\ &\quad + 2\Delta t^2 g(r)(r-1)^2 u_1 u_2 + u_2^2 + \Delta t^2 g(r)^2 (r-1)^4 u_2^2 \\ &\quad + \Delta t^2 u_1^2 - 2\Delta t u_1 u_2 + 2\Delta t g(r)(r-1)^2 u_2^2 - 2\Delta t^2 g(r)(r-1)^2 u_1 u_2 \\ &= (1 + \Delta t^2 g(r)^2 (r-1)^4 + 2\Delta t g(r)(r-1)^2 + \Delta t^2)(u_1^2 + u_2^2) \\ &= ((1 + \Delta t g(r)(r-1)^2)^2 + \Delta t^2) r^2, \end{aligned}$$

wobei der Faktor vor  $r^2$  stetig und streng monoton in  $r$  ist.

Es folgt

$$u_1^2 + u_2^2 = r^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{(1 + \Delta t g(r)(r-1)^2)^2 + \Delta t^2} \leq \frac{v_1^2 + v_2^2}{1 + \Delta t^2}.$$

Also konvergiert hier jede Folge gegen den Nullpunkt, und der einzige Attraktor ist nur der stabile Fixpunkt. Aber der Attraktor des kontinuierlichen Systems ist die Einheitskreisscheibe (Beweis als Übungsaufgabe). Das kontinuierliche und das diskrete Phasenportrait wird in den Abbildungen 3.2 und 3.3 gezeigt.

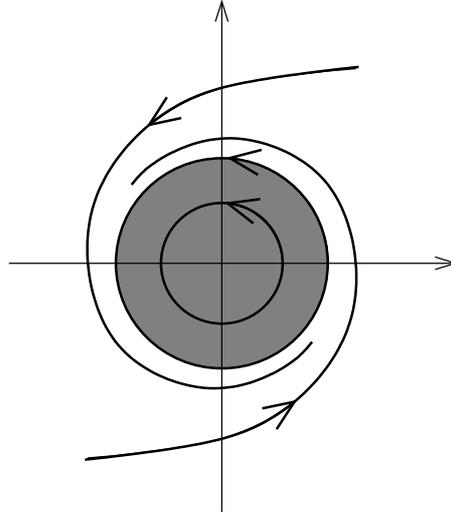


Abbildung 3.2: Phasenbild und Attraktor des kontinuierlichen Systems

Aber es gilt zum Beispiel für Gradientensysteme, d. h.

$$\dot{u} = f(u) \quad \text{mit} \quad f(u) = -\nabla F(u),$$

unter gewissen Voraussetzungen die Unterhalbstetigkeit von Attraktoren, siehe [24, Kap7.7].

Eine weitere Klasse, für die auch die Unterhalbstetigkeit gilt, sind die exponentiell anziehenden Attraktoren.

**Satz 3.4.** *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 3.1.*

*Dann gibt es  $h_0 > 0$ , so dass für alle  $0 < \Delta t < h_0$*

$$M_{\Delta t} = \omega_{\Delta t}(U) \subset U$$

*ein Attraktor des diskreten DS  $\Phi_{\Delta t}(\cdot)$  ist.*

*Zusätzlich sei vorausgesetzt:*

*(i) es existieren Konstanten  $C_1, \alpha > 0$ , unabhängig von  $\Delta t$ , mit*

$$(3.16) \quad \text{dist}(\varphi^t(U), M) \leq C_1 e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

*und*

$$(3.17) \quad \text{dist}(\Phi_{\Delta t}^n(U), M_{\Delta t}) \leq C_1 e^{-\alpha n \Delta t} \quad \forall n \geq 0.$$

*Dann gilt:*

$$(3.18) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} d_H(M_{\Delta t}, M) = 0.$$

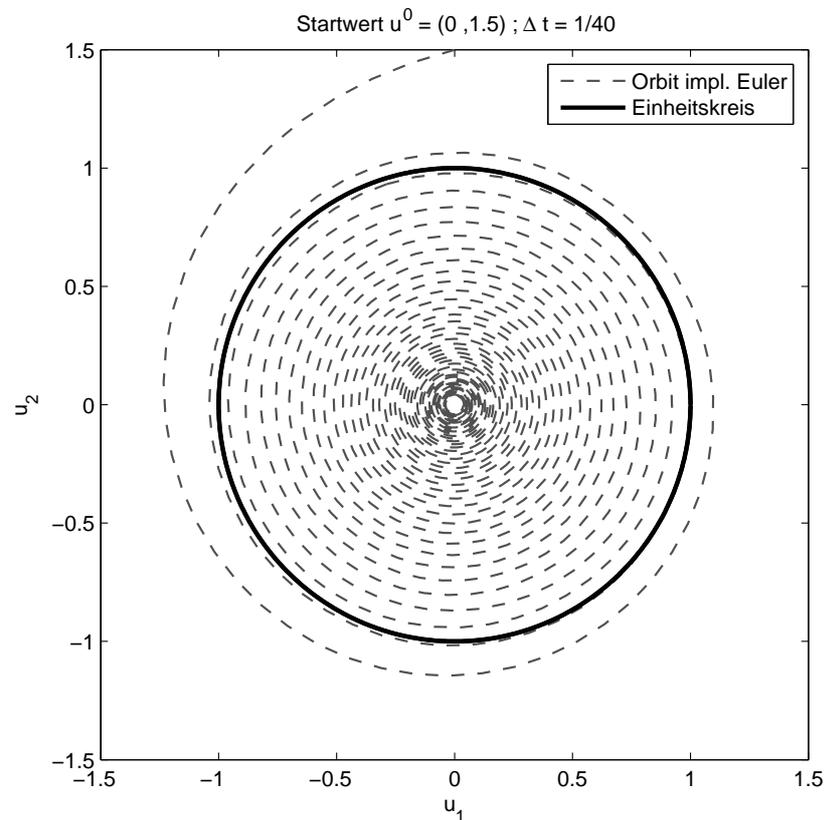


Abbildung 3.3: Orbit des impliziten Euler-Verfahren zum Startwert  $(0, 1.5)$

**Bemerkung.** Setzt man zusätzlich die positive Invarianz von  $U$  bez.  $\Phi_{\Delta t}$  voraus, so folgt  $d_H(M_{\Delta t}, M) \leq C\Delta t^\beta$  für ein  $\beta > 0$ .

**Beweis:** Wegen Satz 3.2 genügt es

$$\text{dist}(M, M_{\Delta t}) \rightarrow 0 \text{ für } \Delta t \rightarrow 0$$

zu zeigen.

**1. Schritt:** Betrachte das von  $\Delta t$ -Schritten des kontinuierlichen DS  $\varphi_{\Delta t} := \varphi^{\Delta t}$  erzeugte diskrete DS und zeige

$$\begin{aligned} \omega(U) &= \{u \in \mathbb{R}^m : \exists t_k \rightarrow \infty, u_k \in U \text{ mit } u = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{t_k}(u_k)\} \\ (3.19) \quad &= \omega_{\varphi_{\Delta t}}(U) = \{u \in \mathbb{R}^m : \exists n_k \rightarrow \infty, u_k \in U \text{ mit } u = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\Delta t}^{n_k}(u_k)\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\omega(U) \supset \omega_{\varphi_{\Delta t}}(U).$$

Sei also  $u \in \omega(U)$ . Dann  $\exists t_k \rightarrow \infty, u_k \in U$  mit

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{t_k}(u_k).$$

Setze  $n_k := \lceil \frac{t_k}{\Delta t} \rceil$ ,  $\tilde{u}_k := \varphi^{t_k - n_k \Delta t}(u_k) \in U$ .

Es folgt

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\Delta t}^{n_k}(\tilde{u}_k) \in \omega_{\varphi_{\Delta t}}(U).$$

Wegen Kap. I Satz 2.25 und (3.19) gilt

$$M = \omega(U) = \omega_{\varphi_{\Delta t}}(U)$$

und es genügt wegen Satz 3.1 den folgenden Schritt zu zeigen.

**2. Schritt:**  $\text{dist}(\omega_{\varphi_{\Delta t}}(U), \omega_{\Delta t}(U)) \rightarrow 0$ . Nach Numerik II und der Voraussetzung ( $K$ ) gibt es  $C_2, L, h_0 > 0$ , so dass für alle  $0 < \Delta t < h_0$  gilt

$$\|\varphi^{n\Delta t}(u) - \Phi_{\Delta t}^n(u)\| \leq C_2 e^{2LT} \Delta t^p \quad \forall u \in U, n\Delta t \leq 2T.$$

Damit gilt für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $T \leq n\Delta t \leq 2T$ , wobei  $T$  noch gewählt wird:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_{\Delta t}^n(U), \omega_{\Delta t}(U)) &\leq \text{dist}(\varphi^{n\Delta t}(U), \Phi_{\Delta t}^n(U)) + \text{dist}(\Phi_{\Delta t}^n(U), \omega_{\Delta t}(U)) \\ &\leq \sup_{u \in U} \|\varphi^{n\Delta t}(u) - \Phi_{\Delta t}^n(u)\| + C_1 e^{-\alpha n\Delta t} \\ &\leq C_2 e^{2KT} \Delta t^p + C_1 e^{-\alpha T}. \end{aligned}$$

Setze

$$T := -\frac{\ln(\Delta t^p)}{\alpha + 2K} \Leftrightarrow \Delta t^p = e^{-(\alpha + 2K)T}$$

und es folgt

$$(3.20) \quad \text{dist}(\varphi_{\Delta t}^n(U), \omega_{\Delta t}(U)) \leq (C_1 + C_2)e^{-\alpha T} = (C_1 + C_2)\Delta t^{\frac{p\alpha}{\alpha + 2K}}.$$

Sei jetzt  $m \in \mathbb{N}$  beliebig mit  $m\Delta t > T$ , sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m - n > 0$  und  $T \leq n\Delta t \leq 2T$ , dann folgt aus (3.20) und der positiven Invarianz von  $U$  unter  $\varphi$ :

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \text{dist}(\varphi_{\Delta t}^m(U), \omega_{\Delta t}(U)) &= \text{dist}(\varphi_{\Delta t}^n(\varphi_{\Delta t}^{m-n}(U)), \omega_{\Delta t}(U)) \\ &\leq \text{dist}(\varphi_{\Delta t}^n(U), \omega_{\Delta t}(U)) \leq (C_1 + C_2)\Delta t^{\frac{p\alpha}{\alpha + 2K}}. \end{aligned}$$

Wegen

$$(3.22) \quad \omega_{\varphi_{\Delta t}}(U) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq m} \varphi_{\Delta t}^n(U)} \subset \overline{\bigcup_{n \geq \frac{T}{\Delta t}} \varphi_{\Delta t}^n(U)}, \quad \forall \Delta t > 0,$$

der Stetigkeit der Distanz von einer kompakten Menge und (3.21) folgt

$$\text{dist}(\omega_{\varphi_{\Delta t}}(U), \omega_{\Delta t}(U)) \leq (C_1 + C_2) \Delta t^{\frac{p\alpha}{\alpha + 2K}} \rightarrow 0.$$

■

# Literaturverzeichnis

- [1] ALT, Hans W.: *Lineare Funktionalanalysis (3. Auflage)*. New York : Springer Verlag, 1999
- [2] AMANN, Herbert: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1983
- [3] BHATIA, N. P. ; SZEGÖ, G. P.: *Stability theory of dynamical systems*. New York : Springer-Verlag, 1970
- [4] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente*. Berlin : Springer-Verlag, 1992
- [5] CHORIN, Alexandre J.: *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer, 1993
- [6] EVANS, Lawrence C.: *Partial Differential Equations*. Providence : American Mathematical Society, 2002
- [7] GRIGORIEFF, Rolf D.: Zur Theorie linearer approximationsregulärer Operatoren. I, II. In: *Math. Nachr.* 55 (1973), S. 233–249; *ibid.* 55 (1973), 251–263
- [8] GROSSMANN, Christian ; ROOS, Hans-Görg: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1992
- [9] HACKBUSCH, Wolfgang: *Multigrid methods and applications*. Berlin : Springer-Verlag, 1985
- [10] HACKBUSCH, Wolfgang: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, 1986
- [11] HAIRER, Ernst ; WANNER, Gerhard: *Solving ordinary differential equations. II. 2*. Berlin : Springer-Verlag, 1996
- [12] HALE, Jack K. ; KOÇAK, Hüseyin: *Dynamics and bifurcations*. New York : Springer-Verlag, 1991
- [13] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis 1*. Berlin : Springer-Verlag, 1990
- [14] KREISS, Heinz-Otto ; LORENZ, Jens: *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*. Boston, MA : Academic Press Inc., 1989

- 
- [15] KUZNETSOV, Yuri A.: *Elements of applied bifurcation theory*. Third. New York : Springer-Verlag, 2004
- [16] NITSCHKE, Johannes C. C.: *Vorlesungen über Minimalflächen*. Berlin [u.a.] : Springer, 1975 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen ; 199). – XIII, 775 S. : graph. Darst.
- [17] NITSCHKE, Johannes C. C.: *Lectures on Minimal Surfaces*. Bd. 1 (Introduction, Fundamentals, Geometry and Basic Boundary Value Problems). Cambridge University Press, 2011
- [18] PARKER, Thomas S. ; CHUA, Leon O.: *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. New York : Springer-Verlag, 1989
- [19] REITMANN, Volker: *Reguläre und chaotische Dynamik*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1996
- [20] REMMERT, Reinhold ; SCHUMACHER, Georg: *Funktionentheorie*. Bd. 1. Berlin : Springer-Verlag, 2002
- [21] ROBINSON, James C.: *Infinite-dimensional dynamical systems*. Cambridge : Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2001. – An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors
- [22] SCHWARZ, Hans-Rudolf: *Methode der finiten Elemente*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1980
- [23] SELL, George R. ; YOU, Yuncheng: *Dynamics of evolutionary equations*. New York : Springer-Verlag, 2002
- [24] STUART, Andrew M. ; HUMPHRIES, A. R.: *Dynamical systems and numerical analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1996
- [25] STUMMEL, Friedrich: Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. I. In: *Math. Ann.* 190 (1970/71), S. 45–92. – ISSN 0025–5831
- [26] STUMMEL, Friedrich: Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. II. In: *Math. Z.* 120 (1971), S. 231–264. – ISSN 0025–5874
- [27] TAYLOR, Angus E. ; LAY, David C.: *Introduction to functional analysis*. 2. ed. New York [u.a.] : Wiley, 1980
- [28] VAINIKKO, Gennadi: *Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden*. B.G. Teubner, Leipzig, 1976
- [29] VAINIKKO, Gennadi: Über die Konvergenz und Divergenz von Näherungsmethoden bei Eigenwertproblemen. In: *Math. Nachr.* 78 (1977), S. 145–164. – ISSN 0025–584X