Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag 25.4.2016, 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 1: [Autonomisierung]

Gegeben sei ein nichtautonomes dynamisches System $(X, \mathbb{T}, \{\varphi^{t,s}\})$, wobei $\varphi^{t,s} : X \to X$ für $s,\ t-s \in \mathbb{T}$ definiert sind und die folgenden Eigenschaften haben:

$$\varphi^{t,t} = \mathrm{Id} \quad \forall\, t \in \mathbb{T}, \tag{D1n}$$

$$\varphi^{t,s} \circ \varphi^{s,r} = \varphi^{t,r} \quad \forall\, t-s, s-r, r \in \mathbb{T}. \tag{D2n}$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\Phi^t(\tau, u) = \big(t+\tau, \varphi^{t+\tau,\tau}(u)\big), \quad (\tau, u) \in \mathbb{T} \times X,\ t \in \mathbb{T},$$

ein dynamisches System auf $\mathbb{T} \times X$ erzeugt wird (Autonomisierung).
Wie hängen im kontinuierlichen, differenzierbaren Fall mit $X = \mathbb{R}^m$ die infinitesimalen Erzeuger von $\varphi^{t,s}$ und Φ^t zusammen?

(6 Punkte)

Aufgabe 2: [Symbolisches dynamisches System]

Betrachte die Menge S_N der biunendlichen Folgen mit Symbolen aus $\{0, \dots, N-1\} =: [N]$, $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$, d. h.

$$S_N = [N]^{\mathbb{Z}} = \big\{u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} : u_i \in [N] \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Man zeige

a) Auf S_N wird für $q > 1$ eine Metrik definiert durch

$$d_q(u, v) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i - v_i| q^{-|i|}, \quad u, v \in S_N.$$

b) Für eine Folge $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S_N und $u \in S_N$ gilt $\lim_{n\to\infty} d_q(u^n, u) = 0$ genau dann, wenn es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $n(j) \in \mathbb{N}$ gibt mit $(u^n)_i = u_i$ für alle $|i| \leq j$ und alle $n \geq n(j)$ (insbesondere ist damit die von d_q erzeugte Topologie auf S_N unabhängig von $q > 1$).

c) Der metrische Raum (S_N, d_q) ist vollständig und kompakt.

d) Der Verschiebeoperator (Shift)

$$\big(\varphi(u)\big)_i = u_{i+1}, \quad u \in S_N, \quad i \in \mathbb{Z}$$

definiert ein diskretes, invertierbares und stetiges dynamisches System auf S_N.

Hinweis: Aufgabe 2 d) lässt sich ohne Aufgabe 2 c) lösen. In Aufgabe 2 c) zeige man die Folgenkompaktheit, die in metrischen Räumen äquivalent zur Überdeckungskompaktheit ist.

(8 Punkte)