Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Mo. 2.5.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 3: [Positiv invariante Mengen]

Gegeben seien $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit

$$(f(u), u)_2 \le \alpha - \beta \, ||u||_2^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

wobei $(\cdot,\cdot)_2$ das euklidische innere Produkt bezeichnet. Zeigen Sie, dass es ein R_0 gibt, so dass die Kugeln

$$K_R = \{u \in \mathbb{R}^m : ||u||_2 \le R\}$$

für $R \ge R_0$ positiv invariant für das durch $\dot{u} = f(u)$ erzeugte (lokale) dynamische System sind. Zeigen Sie außerdem, dass es zu jedem $R \ge R_0$ ein $h_0 = h_0(R) > 0$ gibt, so dass K_R auch für die Euler Abbildung

$$\Phi_h(u) = u + h\, f(u), \; 0 < h \le h_0$$

positiv invariant ist. Kann man h_0 unabhängig von R wählen?

(6 Punkte)

Aufgabe 4: [ω-Limesmengen]

a) Für das symbolische dynamische System $(S_N, \mathbb{Z}, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{Z}})$ aus Aufgabe 2 zeige man, dass es ein Element $u \in S_N$ gibt, dessen ω-Limesmenge $\omega(u)$ der gesamte Raum S_N ist.

b) Gegeben sei das durch

$$\varphi \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {u_2}^3 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

erzeugte diskrete dynamische System $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{N}})$. Stellen Sie eine explizite Formel für $\varphi^t(u)$ auf und bestimmen dann für jedes $u \in X := [-1,1] \times [-1,1]$ die ω-Limesmenge $\omega(u)$.

(4+4 Punkte)