Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 9.5.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 5: [Stabilitätseigenschaften eines Fixpunkts im zeitdiskreten Fall]

Gegeben sei das durch

$$\varphi(u) = Au, \ A \in \mathbb{C}^{m,m}$$

erzeugte diskrete dynamische System $(\mathbb{C}^m, \mathbb{N}, \{A^n\}_{n\in\mathbb{N}})$.
Charakterisieren Sie die Eigenschaft, dass der Fixpunkt 0 stabil bzw. asymptotisch stabil bzw. instabil ist, durch Bedingungen an die Eigenwerte von A.

(6 Punkte)

Aufgabe 6: [Eine weitere Charakterisierung der asymptotischen Stabilität]

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

(ii) Es existiert eine symmetrische und positiv definite Matrix $W \in \mathbb{R}^{m,m}$ und ein $\alpha > 0$ mit

$$\langle x, Ax\rangle_W \leq -\alpha\langle x, x\rangle_W \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Hier bezeichnet $\langle x, y\rangle_W := \langle x, Wy\rangle_2$ das durch W induzierte innere Produkt und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ das euklidische innere Produkt.

Geben Sie außerdem eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, auf die Aussage (i) zutrifft, aber für die es kein $\alpha > 0$ gibt mit $\langle x, Ax\rangle_2 \leq -\alpha\langle x, x\rangle_2 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$.
Hinweis:

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Diskutieren Sie $e^{tA}x$ in der Norm $\|x\|_W := \sqrt{\langle x, x\rangle_W}$.

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Betrachten Sie zunächst komplexe obere Dreiecksmatrizen ($A \in \mathbb{C}^{m,m}$, $A_{ij} = 0$ für $i > j$), suchen eine geeignete Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_m)$ und $\alpha > 0$ mit

$$\mathrm{Re}(x^H D^{-1}ADx) \leq -\alpha\|x\|_2^2 \qquad \forall x \in \mathbb{C}^m$$

und setzen dann $W = D^{-2}$. Reduzieren Sie anschließend mit Hilfe der Schurschen Normalform den allgemeinen Fall auf den der oberen Dreiecksmatrizen. Andere Lösungswege sind möglich.

(8 Punkte)