Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 23.5.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 9: [Stabilität eines diskreten periodischen Orbits]
Gegeben sei ein diskretes stetiges dynamisches System $(X, \mathbb{N}, \{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

a) Sei $\gamma(u_0) = \{u_j = \varphi^j(u_0) : j = 0, \ldots N-1\}$ ein Orbit der Periode $N \geq 2$, also insbesondere $\varphi^N(u_0) = u_0$. Man zeige, dass der Orbit $\gamma(u_0)$ genau dann eine (asymptotisch) stabile Menge des dynamischen Systems ist, wenn u_0 ein (asymptotisch) stabiler Fixpunkt von φ^N ist.

b) Für einen periodischen Orbit wie in a) mit $X = \mathbb{R}^m$,$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ gebe man jeweils ein hinreichendes Kriterium für asymptotische Stabilität bzw. Instabilität an, das sich nur auf die Jacobimatrizen $D\varphi(u_j), j = 0, \ldots, N-1$ stützt.

c) Für die quadratische Familie $\varphi_\lambda(u) = \lambda u(1-u)$, $u \in [0,1] = X, \lambda \in [0,4]$ zeige man (vgl. Skript S.20), dass es einen Orbit der Periode 2 nur für $3 < \lambda \leq 4$ gibt, und zwar

$$\gamma(u_-) = \{u_-, u_+\}, \quad u_\pm = \frac{\lambda+1}{2\lambda}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda+1}}\right).$$

Untersuchen Sie, für welche λ dieser Orbit asymptotisch stabil ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 10: [Stabilität eines kontinuierlichen periodischen Orbits]

Transformieren Sie das System

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = f_\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -u_2 + u_1(\lambda - u_1^2 - u_2^2) \\ u_1 + u_2(\lambda - u_1^2 - u_2^2) \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten $(u_1, u_2) = P(r, \theta) := r(\cos\theta, \sin\theta)$ auf ein System

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\lambda, r) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Welche Beziehung besteht zwischen den Flüssen φ^t von (1) und ψ^t von (2)?
Durch Trennung der Veränderlichen bestimme man die allgemeine Lösung von (2). Zeigen Sie damit, dass (1) einen asymptotisch stabilen periodischen Orbit besitzt, der aus einem Kreis besteht. Besitzt das System (1) einen Attraktor und ist er global ?

(8 Punkte)