Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 30.5.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 11: [Diskretisierung des Systems aus Aufgabe 10]

Man approximiere das System (1) aus Aufgabe 10 mit dem Euler-Verfahren

$$\Phi_{\Delta t}(u,\lambda) = u + \Delta t f_\lambda(u), \quad 0 < \Delta t < 1, \quad \lambda > 0. \tag{1}$$

Leiten Sie aus dem Ansatz in Polarkoordinaten

$$\Phi_{\Delta t}(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda) = (\rho\cos\gamma, \rho\sin\gamma)$$

eine Beziehung der Form $\rho = g_{\Delta t}(r,\lambda)$ her. Untersuchen Sie, für welche $\Delta t, \lambda > 0$ die Abbildung (1) invariante Kreise mit Radius $R(\Delta t, \lambda)$ besitzt. Wie verhält sich $R(\Delta t, \lambda)$ bei festem $\lambda > 0$ für $\Delta t \longrightarrow 0$? Besitzt das diskrete System (1) einen Attraktor ?

(7 Punkte)

Aufgabe 12: [Eine Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung]

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x),\ u_t(x,0) = v_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie in den beiden folgenden Fällen die exakte Lösung und zeichnen sie auf dem angegebenen Gebiet Ω als surface plot.
(i) $c = 2$, $v_0(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, $\Omega = [-4\pi, 4\pi] \times [0,2]$, und

$$u_0(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{für } x \in [-\pi,\pi], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) $c = 1$, $u_0(x) = x^2$, $v_0(x) = 2x$ für $x \in \mathbb{R}$, $\Omega = [-3,1] \times [0,1]$.

b) Transformieren Sie die Anfangswertaufgabe (2) mittels $U = (u, u_t - cu_x)^T$ auf ein System erster Ordnung der Form

$$U_t = AU_x + BU, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad U(0) = U_0 \tag{3}$$

mit geeigneten Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und geben den Lösungsfluss dieses Systems an.

(7 Punkte)