Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 6.6.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 13: [Der infinitesimale Erzeuger zur Advektionsgleichung]

Für Funktionen $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei der Fluss $\varphi^t, t \geq 0$ durch

$$\varphi^t(u_0)(x) = u_0(x + at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

mit $a \neq 0$ definiert. Man zeige, dass der Grenzwert

$$Au_0 := \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(\varphi^h(u_0) - u_0)$$

genau dann in $(\mathcal{C}_{\text{unif}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ bzw. in $(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ existiert, wenn $u_0 \in \mathcal{C}^1_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ bzw. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ gilt. In beiden Fällen gilt $Au_0 = au_0'$.

(8 Punkte)

Aufgabe 14: [Dynamik in der Nähe von periodischen Orbits]

Zeigen Sie numerisch, dass eine Langzeitabschätzung des Konvergenzfehlers

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi^{n\Delta t}(u_0) - \Phi^n_{\Delta t}(u_0)\| \leq C(\Delta t)^p$$

in der Nähe periodischer Lösungen im Allgemeinen falsch ist. Betrachten Sie dazu noch einmal das System aus Aufgabe 10 mit $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -u_2 + u_1(1 - u_1^2 - u_2^2) \\ u_1 + u_2(1 - u_1^2 - u_2^2) \end{pmatrix}, \quad u(0) = u_0. \tag{1}$$

Schreiben Sie ein Programm, dass die Lösung zu (1) numerisch mit der Euler-Methode und dem klassischen Runge-Kutta Verfahren auf dem Intervall $[0, T]$ approximiert. Bestimmen Sie den ersten Zeitpunkt $t_n = n\Delta t$, zu dem der euklidische Abstand zwischen der exakten Lösung und der numerischen Approximation u^n

$$\|u(t_n) - u^n\|_2 \geq \delta$$

ist (exakte Lösung aus Aufgabe 10 bekannt). Verwenden Sie dabei folgende Parameterwerte:

(i) Für das Euler-Verfahren: $T = 2500$, $\Delta t = 0.1$, $u_0 = (2, 0)^T$ und $\delta = 1$.

(ii) Für das klassische Runge-Kutta Verfahren: $T = 10000$, $\Delta t = 0.2$, $u_0 = (2, 0)^T$ und $\delta = 0.1$.

Senden Sie Ihr Programm an *agrirod@uni-bielefeld.de*.

(6 Punkte)