Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 13.6.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 15:[Dynamik von Einschrittverfahren in einem Beispiel]

Untersuchen Sie die diskreten dynamischen Systeme $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, \{\Phi_{\Delta t}^n\}_{n\in\mathbb{N}})$, die sich durch Anwendung von Einschrittverfahren auf

$$u' = -u^3, \quad u(0) = u_0$$

ergeben:

a) Für das Euler-Verfahren besitzt $\Phi_{\Delta t}$ einen Fixpunkt bei 0, der das Intervall $(-\sqrt{\frac{2}{\Delta t}}, \sqrt{\frac{2}{\Delta t}})$ anzieht und einen instabilen 2-periodischen Orbit $\{-\sqrt{\frac{2}{\Delta t}}, \sqrt{\frac{2}{\Delta t}}\}$ (Vervollständigung der Vorlesung).

b) Für das implizite Euler-Verfahren besitzt $\Phi_{\Delta t}$ nur den Fixpunkt 0 und dieser ist global anziehend (Vervollständigung der Vorlesung).

c) Für das verbesserte Polygonzug-Verfahren und das Verfahren von Heun bestimme man alle Fixpunkte und deren asymptotische Stabilität.

(6 Punkte)

Aufgabe 16: [Zeitdiskretisierung der Wärmeleitungsgleichung]

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx},\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0 \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = u_0(x). \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass diese Aufgabe für $u_0 \in L^2(0,1)$ die (schwache) Lösung

$$u(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^0 e^{\lambda_k t} v_k, \quad \lambda_k = -k^2\pi^2$$

besitzt, wobei die Koeffizienten sich aus der Fourierentwicklung

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^0 v_k, \quad c_k^0 = \langle u_0, v_k\rangle_2\ v_k(x) = \sqrt{2}\ \sin(k\pi x), x \in [0,1]$$

ergeben. Wir diskretisieren nur die Zeit mit der Schrittweite $\Delta t > 0$ und dem impliziten Euler-Verfahren, d.h. wir berechnen Näherungen $u^n(x), x \in [0,1]$ für $u(x, n\Delta t), x \in [0,1]$ für $n = 1, 2, \ldots$ rekursiv aus der folgenden Randwertaufgabe:

$$\frac{1}{\Delta t}\,(u^{n+1} - u^n) = u_{xx}^{n+1},\ u^{n+1}(0) = u^{n+1}(1) = 0.$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k^n der (formalen) Reihenentwicklung

$$u^n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n v_k.$$

und zeigen $u^n \in L^2(0,1)$ für jedes $n \geq 1$.

b) Zeigen Sie für festes $T > 0$ und die Schrittweiten $\Delta t_N = T/N$

$$\|u(\cdot, T) - u^N\|_{L^2} \to 0 \quad \text{für} \quad N \to \infty.$$

(8 Punkte)