Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme
Sommersemester 2016

W.–J. Beyn

Abgabe: Montag, 27.6.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 19: [Konsistenz und Fixpunkte von Mehrschrittverfahren]

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^m, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \tag{1}$$

und ein explizites k-Mehrschrittverfahren der Form

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu u^{j+\nu} = V(u^j, \ldots, u^{j+k-1}, \Delta t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

mit Koeffizienten a_ν, $\nu = 0, \ldots, k$, $a_k \neq 0$, einer Verfahrensfunktion $V \in C^1(\mathbb{R}^{km} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ und einer Startrechnung

$$u^j = V_j(u^0, \Delta t), \quad V_j \in C^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

(i) Zeigen Sie, dass das Mehrschrittverfahren genau dann konsistent ist (wie in Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen), wenn für alle $y \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu = 0, \quad \left(\sum_{\nu=0}^{k} \nu a_\nu \right) f(y) = V(y, \ldots, y, 0), \quad V_j(y, 0) = y, \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

(ii) Schreiben Sie das Mehrschrittverfahren mit den Vektoren $U^j = (u^j, \ldots, u^{j+k-1})^T \in \mathbb{R}^{km}$ um in ein Einschrittverfahren der Form

$$U^{j+1} = \Phi_{\Delta t}(U^j), j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

mit Startrechnung $U^0 = \Phi_{\text{start}}(u^0)$. Sei $\bar{u}$ ein Gleichgewicht von (1) mit $Df(\bar{u})$ invertierbar und ein konsistentes Mehrschrittverfahren der Stufe k gegeben. Zeigen Sie, dass $\Phi_{\Delta t}$ ebenfalls einen Fixpunkt für hinreichend kleines Δt besitzt und dieser in einer geeigneten Umgebung eindeutig ist (Satz über implizite Funktionen !). Lässt sich der Fehler zum Gleichgewicht $\bar{u}$ durch den Konsistenzfehler abschätzen? Was bedeutet der Fixpunkt für das Verfahren (2) ? Gibt es i.A. eine Startrechnung, die diesen Fixpunkt erzeugt ?

(8 Punkte)

Aufgabe 20: [Differentialgleichungen 2. Ordnung und Stabilitätsbereiche]

Betrachte das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\ddot{u} + \alpha\dot{u} = Au, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \tag{4}$$

mit einer Konstanten $\alpha > 0$ und einer (i.A. komplex) diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Schreiben Sie (4) auf ein System erster Ordnung um

$$\dot{U} = BU, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix},$$

und geben Sie die Eigenwerte $\lambda \in \sigma(B)$ in Abhängigkeit von den Eigenwerten $\mu \in \sigma(A)$ an. Falls $\sigma(A)$ reell ist und in einem Intervall $[-a, -b]$ mit $0 < b < a$ liegt, beschreibe man die Lage von $\sigma(B)$ und bestimme einen Sektor um die negative reelle Achse

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(-z)| \leq \theta\}, \quad \arg(z) = \varphi, \text{ falls } z = |z|e^{i\varphi}, \varphi \in (-\pi, \pi],$$

in dem $\sigma(B)$ liegt. Diskutieren Sie die Konsequenzen für die numerische Lösung durch ein Einschrittverfahren mit Stabilitätsbereich S zur Schrittweite $\Delta t > 0$.

(6 Punkte)