Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 4.7.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 21: [Mehrschrittverfahren als Einschrittverfahren]

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m,$$

und ein lineares explizites und irreduzibles Mehrschrittverfahren der Form

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu u^{j+\nu} = \sum_{\nu=0}^{k-1} b_\nu f(u^{j+\nu}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

der Konsistenzordnung $p \geq 1$. Sei $\overline{u} \in \mathbb{R}^m$ ein Fixpunkt des kontinuierlichen Systems und $\Delta t > 0$ gegeben, so dass $\Delta t\mu$ im Inneren des Bereichs $\mathcal{S}$ der absoluten Stabilität für alle $\mu \in \sigma(Df(\overline{u}))$ liegt. Man zeige, dass der zu $\overline{u}$ gehörende Fixpunkt $(\overline{u}, \ldots, \overline{u})$ des diskreten dynamischen Systems $\Phi_{\Delta t}$ aus Aufgabe 19 asymptotisch stabil ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 22: [Diskretisierung einer Reaktions-Diffusionsgleichung]

Betrachten Sie die lineare Reaktions-Diffusionsgleichung (Anfangsrandwertaufgabe)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 2u,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1,\\ u(x,0) &= u_0(x),\ 0 \leq x \leq 1,\\ u(0,t) &= \gamma_0,\ u(1,t) = \gamma_1,\ 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

mit Randwerten $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$.

(i) Leiten Sie mit Hilfe von Differenzquotienten zur Schrittweite $\Delta x = \frac{1}{N+1}$ das N-dimensionale Liniensystem (nur räumliche Diskretisierung)

$$u_t = (N+1)^2 Au - 2u + (N+1)^2 g \tag{1}$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$$

und dem Vektor $g = (\gamma_0, 0, \ldots, 0, \gamma_1)^T \in \mathbb{R}^N$ her.

(ii) Schreiben Sie ein Programm, das das Liniensystem (1) zeitlich mit dem expliziten und impliziten Eulerverfahren diskretisiert. Man verwende als Anfangswert die Funktion

$$u_0(x) = (\gamma_1 - \gamma_0)x + \gamma_0, \quad x \in [0, 1]$$

sowie als Randwerte $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = \frac{5}{4}$. Führen Sie die Rechnung mit den Schrittweitenkombinationen

$$(\Delta x, \Delta t) = (0.1, 0.01), (0.1, 0.005), (0.05, 0.001), (0.02, 0.0001)$$

durch und zeichnen Sie Ihr Ergebnis geeignet mindestens zu den Zeitpunkten $t_i = \frac{i}{20}$, $i = 0, \ldots, 20$.

Senden Sie Ihr Programm und die Ergebnisse per Email an *agirod@uni-bielefeld.de* .

(8 Punkte)